NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PELLET

Expression de la somme des puissances semblables des racines d'une équation, en fonction des coefficients

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 259-265

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__259_1>

EXPRESSION DE LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES RACINES D'UNE ÉQUATION, EN FONCTION DES COEFFICIENTS;

PAR M. PELLET,

Professeur au lycée d'Angers.

1. Soit

$$X = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0$$

l'équation donnée. On sait qu'en désignant par a, b

$c, \ldots, k, l$ les m racines de cette équation, on a

$$\frac{X'}{X} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{1}{x-k} + \frac{1}{x-l}.$$

La fonction $\frac{1}{x-a}$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances négatives et décroissantes de x, pour toutes les valeurs de x dont le module est supérieur au module de a; on trouve, par la division,

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \ldots.$$

Donc, en remplaçant successivement a par chacune des autres racines, et ajoutant ensemble tous les résultats, on aura

$$\frac{X'}{X} = \frac{m}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \ldots + \frac{s_n}{x^{n+1}} + \ldots,$$

s_n désignant la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines de $X = 0$.

D'après cela, $\frac{X'}{X}$ est développable suivant les puissances entières, négatives et décroissantes de x, pour toutes les valeurs de x dont le module est supérieur au plus grand des modules des racines de $X = 0$, et s_n est le coefficient de $\frac{1}{x^{n+1}}$ dans ce développement, ou de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $x^n \frac{X'}{X}$, suivant les puissances positives et négatives de x.

2. Désignons par $f(x)$ le polynôme

$$p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m$$

et par z une indéterminée. On a

$$\frac{X'}{X} = \frac{mx^{m-1} - zf'(x)}{x^m - zf(x)}$$

pour z égal à -1.

On peut assigner un nombre positif tel que, pour toutes les valeurs de x dont le module est supérieur à ce nombre, le module de $f(x)$ soit plus petit que celui de x^m. Pour toutes ces valeurs de x, z ayant un module inférieur ou égal à 1, on aura

$$\frac{1}{x^m - zf(x)} = \frac{1}{x^m} + z\frac{f(x)}{x^{2m}} + \ldots + \frac{z^\mu}{x^m}\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu + \ldots.$$

Multipliant les deux membres par $mx^{m-1} - zf'(x)$, on a dans le premier $\dfrac{mx^{m-1} - zf'(x)}{x^m - zf(x)}$, et dans le second une série dans laquelle le coefficient de z^μ est égal à

$$\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu \frac{mx^{m-1}}{x^m} - \left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^{\mu-1} \frac{f'(x)}{x^m} = -\frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu,$$

d'où

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x^n\frac{mx^{m-1} - zf'(x)}{x^m - zf(x)} = x^n\frac{mx^{m-1}}{x^m} - zx^n\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x^m}\right] - \ldots \\ - \frac{z^\mu}{\mu}x^n\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu - \ldots, \end{aligned}\right.$$

et s_n est égale à la somme des coefficients de $\frac{1}{x}$ dans les termes du second membre, lorsqu'on y remplace z par -1.

3. Ici nous ferons une remarque. On a

$$x^n\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu + \left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\left\{x^n\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu\right\};$$

$[f(x)]^\mu$ est une fonction entière de x; si l'on divise chaque terme par $x^{m\mu-n}$, on voit que $x^n\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu$ est de la forme

$$\begin{gathered}A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_i x^i + \ldots \\ + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \ldots + \frac{B_i}{x^i} + \ldots,\end{gathered}$$

le nombre des termes dans chaque ligne étant limité, et les quantités A et B étant indépendantes de x. En prenant la dérivée, on a

$$\begin{gathered}A_1 + 2A_2 x + \ldots + iA_i x^{i-1} + \ldots \\ - \frac{B_1}{x^2} - \ldots - \frac{iB_i}{x^{i+1}} - \ldots\end{gathered}$$

et elle ne contient pas de terme en $\frac{1}{x}$. Il en résulte que les coefficients de $\frac{1}{x}$ sont égaux et de signes contraires dans les fonctions

$$x^n \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu \quad \text{et} \quad \left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu n x^{n-1}.$$

4. Cela posé, revenons à la formule (1). D'après ce qui vient d'être dit, le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le second membre de cette formule est égal à celui de $\frac{1}{x}$ dans la série

$$x^n \frac{m x^{m-1}}{x^m} + z\frac{f(x)}{x^m} n x^{n-1} + \ldots + \frac{z^\mu}{\mu}\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu n x^{n-1} + \ldots.$$

Donc, en remplaçant z par -1, on a

$$s_n = -A_1 + A_2 - A_3 + \ldots + (-1)^\mu A_\mu + \ldots,$$

où

$$A_\mu = \text{coeff. de } \frac{1}{x} \quad \text{dans} \quad n x^{n-1}\frac{(p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m)^\mu}{\mu . x^{m\mu}}.$$

Ce coefficient est celui de $x^{m\mu-n}$ dans

$$\frac{n}{\mu}(p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m)^{\mu},$$

qui est égal à

$$\frac{n}{\mu}\sum \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda_1+1)\Gamma(\lambda_2+1)\ldots\Gamma(\lambda_m+1)} p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_m^{\lambda_m},$$

où $\Gamma(\mu+1)$ représente le produit $1.2.3\ldots\mu$. Le signe Σ s'étend à toutes les valeurs entières, nulles et positives des exposants $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ susceptibles de vérifier les conditions

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = \mu,$$

$$(m-1)\lambda_1 + (m-2)\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_{m-2} + \lambda_{m-1} = m\mu - n.$$

Multipliant par m la première équation, et retranchant la seconde, on a

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + m\lambda_m = n,$$

qui peut remplacer l'une quelconque des précédentes.

On voit que A_μ est nul pour les valeurs de μ ne satisfaisant pas aux inégalités

$$n \geqq \mu \geqq \frac{n}{m}.$$

La formule à laquelle nous venons de parvenir a été donnée par Waring dans ses *Meditationes algebraicæ,* sans démonstration. La précédente nous paraît plus simple que celle exposée par M. Serret dans son *Algèbre supérieure,* p. 442.

5. Cette formule donne facilement la somme des puissances semblables lorsque l'exposant est négatif et entier. En effet, si dans $X = 0$ on change x en $\frac{1}{x}$, l'équation obtenue a pour racines les inverses de racines de l'équation primitive. Il en résulte que s_{-n} est donnée par la

formule précédente, en changeant respectivement

$$p_1,\quad p_2,\quad p_3,\ldots,\quad p_{m-1},\quad p_m$$

en

$$\frac{p_{m-1}}{p_m},\quad \frac{p_{m-2}}{p_m},\ldots,\quad \frac{p_1}{p_m},\quad \frac{1}{p_m}.$$

6. Appliquons la formule à l'équation trinôme

$$x^m + px + q = 0.$$

On a

$$\mathrm{A}_\mu = \text{coeff. de } x^{m\mu-n} \quad \text{dans} \quad \frac{n}{\mu}(px+q)^\mu,$$

ou

$$\mathrm{A}_\mu = n\frac{1.2.3\ldots(\mu-1)}{1.2\ldots(m\mu-n).1.2.3\ldots[n-(m-1)\mu]}p^{m\mu-n}q^{n-(m-1)\mu},$$

et

$$s_n = \Sigma(-1)^\mu \mathrm{A}_\mu,$$

μ étant compris entre $\frac{n}{m}$ et $\frac{n}{m-1}$, de sorte que s_n a un nombre de termes égal au plus grand nombre entier compris dans

$$1+\frac{n}{m(m-1)},\quad \text{si}\quad n \geqq m-1.$$

Si $m=2$, il vient

$$\mathrm{A}_\mu = n\frac{1.2\ldots(\mu-1)}{1.2\ldots(2\mu-n).1.2\ldots(n-\mu)}p^{2\mu-n}q^{n-\mu},$$

ou, en posant $n-\mu=\lambda$, d'où $\mu=n-\lambda$,

$$n\frac{(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)\ldots(n-2\lambda+1)}{1.2\ldots\lambda}p^{n-2\lambda}q^\lambda;$$

et

$$s_n = (-1)^n\Sigma(-1)^\lambda n\frac{(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)\ldots(n-2\lambda+1)}{1.2\ldots\lambda}p^{n-2\lambda}q^\lambda,$$

le nombre positif λ prenant successivement les valeurs 0, 1, 2,... jusqu'au plus grand nombre entier compris dans $\frac{n}{2}$. De sorte que

$$s_n = (-1)^n \Big[p^n - np^{n-2}q + \ldots \\ + (-1)^\lambda \frac{n(n-\lambda-1)\ldots(n-2\lambda+1)}{1.2\ldots\lambda} p^{n-2\lambda}q^\lambda + \ldots \Big].$$