Nouvelles annales de mathématiques

H. Lemonnier

Foyers et directrices des surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 216-222

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__216_1>

FOYERS ET DIRECTRICES DES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. H. LEMONNIER,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

1. Soit $\varphi(x, y, z)$ l'ensemble des termes du second degré dans l'équation générale du second degré

$$f(x, y, z) = Ax^2 + \ldots + D = 0.$$

Si les coordonnées sont rectangulaires et que S soit une racine de l'équation ordinaire dite en S, on sait que l'on a deux plans cycliques par l'équation

$$\varphi - S(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Posons

$$\varphi - S(x^2 + y^2 + z^2) = \alpha\beta,$$

α et β désignant ainsi deux fonctions du premier degré. Deux plans cycliques quelconques respectivement parallèles aux plans α et β ayant pour équations $\alpha + 2p = 0$, $\beta + 2q = 0$, l'équation

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - (\alpha + 2p)(\beta + 2q) \\ &= \varphi(x, y, z) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D - \varphi \\ &\quad + S(x^2 + y^2 + z^2) - 2p\beta - 2q\alpha - 4pq \\ &= S(x^2 + y^2 + z^2) + 2Cx + 2C'y + 2C''z \\ &\qquad + D - 2p\beta - 2q\alpha - 4pq = 0 \end{aligned}$$

sera celle d'une sphère passant par les deux sections cycliques relatives à ces plans.

Si la sphère est de rayon nul, son centre sera un foyer de la surface; alors on a pour ce centre

$$\begin{aligned} Sx + C \; - p\beta'_x - q\alpha'_x &= 0, \\ Sy + C' - p\beta'_y - q\alpha'_y &= 0, \\ Sz + C'' - p\beta'_z - q\alpha'_z &= 0, \end{aligned}$$

$$Cx + C'y + C''z + D - p\beta - q\alpha - p\beta'_t - q\alpha'_t - 4pq = 0.$$

L'élimination de p et de q entre ces quatre équations mène à deux équations pour le lieu des foyers qui correspondent à la valeur de S considérée.

Les trois premières équations donnent d'abord

$$\begin{vmatrix} Sx + C & \beta'_x & \alpha'_x \\ Sy + C' & \beta'_y & \alpha'_y \\ Sz + C'' & \beta'_z & \alpha'_z \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(1)\qquad S\begin{vmatrix} x & \beta'_x & \alpha'_x \\ y & \beta'_y & \alpha'_y \\ z & \beta'_z & \alpha'_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & \beta'_x & \alpha'_x \\ C' & \beta'_y & \alpha'_y \\ C'' & \beta'_z & \alpha'_z \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation d'un plan qui passe par le centre de la surface, puisqu'il passe à l'origine quand elle est en ce centre, et ce plan est perpendiculaire à l'intersection des plans α et β. C'est, en conséquence, le plan principal perpendiculaire à la direction que détermine S, en supposant S différent de zéro.

Considérons d'autre part les équations

$$\begin{gathered} Sx + C \quad - p\beta'_x - q\alpha'_x = 0, \\ Sz + C'' - p\beta'_z - q\alpha'_z = 0, \\ Cx + C'y + C''z + D - p\beta - q\alpha - p\beta'_t - q\alpha'_t - 4pq = 0. \end{gathered}$$

On peut d'abord en tirer

$$\begin{vmatrix} Sx + C & \beta'_x & \alpha'_x \\ Sz + C'' & \beta'_z & \alpha'_z \\ Cx + C'y + C''z + D - 4pq & \beta + \beta'_t & \alpha + \alpha'_t \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} Sx + C & \alpha'_x & \beta'_x \\ Sz + C'' & \alpha'_z & \beta'_z \\ Cx + C'y + C''z + D & \alpha + \alpha'_t & \beta + \beta'_t \end{vmatrix} - 4pq \begin{vmatrix} \alpha'_x & \beta'_x \\ \alpha'_z & \beta'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Or, par les équations

$$\begin{gathered} p\beta'_x + q\alpha'_x = Sx + C, \\ p\beta'_z + q\alpha'_z = Sz + C'', \end{gathered}$$

on obtient

$$\begin{vmatrix} \beta'_x & \alpha'_x \\ \beta'_z & \alpha'_z \end{vmatrix} p = \begin{vmatrix} Sx + C & \alpha'_x \\ Sz + C'' & \alpha'_z \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \beta'_x & \alpha'_x \\ \beta'_z & \alpha'_z \end{vmatrix} q = \begin{vmatrix} \beta'_x & Sx + C \\ \beta'_z & Sz + C'' \end{vmatrix},$$

d'où

$$pq \begin{vmatrix} \beta'_x & \alpha'_x \\ \beta'_z & \alpha'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Sx+C & \alpha'_x \\ Sz+C'' & \alpha'_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta'_x & Sx+C \\ \beta'_z & Sz+C'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \beta'_x & \alpha'_x \\ \beta'_z & \alpha'_z \end{vmatrix};$$

puis il en résulte

$$\begin{vmatrix} \alpha'_x & \beta'_x \\ \alpha'_z & \beta'_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Sx+C & \alpha'_x & \beta'_x \\ Sz+C'' & \alpha'_z & \beta'_z \\ Cx+C'y+C''z+D & \alpha+\alpha'_t & \beta+\beta'_t \end{vmatrix}$$
$$+4 \begin{vmatrix} Sx+C & \alpha'_x \\ Sz+C'' & \alpha'_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Sx+C & \beta'_x \\ Sz+C'' & \beta'_z \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$(2) \left\{ \begin{aligned} &\begin{vmatrix} \alpha'_x & \beta'_x \\ \alpha'_z & \beta'_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Sx+C & \alpha'_x & \beta'_x \\ Sz+C'' & \alpha'_z & \beta'_z \\ C'y+D-S(x^2+z^2) & y\alpha'_y+2\alpha'_t & y\beta'_y+2\beta'_t \end{vmatrix} \\ &\qquad +4 \begin{vmatrix} Sx+C & \alpha'_x \\ Sz+C'' & \alpha'_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Sx+C & \beta'_x \\ Sz+C'' & \beta'_z \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \right.$$

On a ainsi une équation du second degré ou une identité.

Par le changement de x en y ou de z en y, on aurait deux autres équations analogues. L'une d'elles au moins, jointe à l'équation du plan signalé, détermine une conique comme lieu de foyers répondant à la valeur de S.

Application à l'ellipsoïde. — Soit

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a > b > c.$$

Prenons $S = \frac{1}{b^2}$, nous aurons

$$\alpha\beta = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 - \frac{x^2+y^2+z^2}{b^2} = \frac{b^2-c^2}{b^2c^2} z^2 - \frac{a^2-b^2}{a^2b^2} x^2;$$

d'où

$$\alpha = \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc}z - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}x,$$

$$\beta = \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc}z + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}x,$$

par suite

$$\alpha'_x = -\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}, \quad \alpha'_y = 0, \quad \alpha'_z = \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc}, \quad \alpha'_t = 0,$$

$$\beta'_x = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}, \quad \beta'_y = 0, \quad \beta'_z = \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc}, \quad \beta'_t = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha'_x & \beta'_x \\ \alpha'_z & \beta'_z \end{vmatrix} = -2\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{ab^2c}.$$

L'équation (1) devient

$$y = 0,$$

et l'équation (2)

$$-2\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{ab^2c}\begin{vmatrix} \dfrac{x}{b^2} & -\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab} & \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab} \\ \dfrac{z}{b^2} & \dfrac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc} & \dfrac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc} \\ -1-\dfrac{x^2+z^2}{b^2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+4\begin{vmatrix} \dfrac{x}{b^2} & -\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab} \\ \dfrac{z}{b^2} & \dfrac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \dfrac{x}{b^2} & \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab} \\ \dfrac{z}{b^2} & \dfrac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$-\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{a^2b^4c^2}\left(1+\frac{x^2+z^2}{b^2}\right) + \frac{b^2-c^2}{b^2c^2}\frac{x^2}{b^4} - \frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\frac{z^2}{b^4} = 0,$$

$$-\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{a^2c^2} + \frac{b^2-c^2}{b^2c^2}x^2\frac{b^2}{a^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2b^2}z^2\frac{b^2}{c^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2-c^2} = 1.$$

On a ainsi pour focale dans le plan xz, vu qu'on suppose $a > b > c$, une hyperbole ayant pour sommets réels les foyers de l'ellipse du plan xy, et pour foyers ceux de l'ellipse du plan xz.

Les deux autres focales, en déduisant de là leurs équations par permutation tournante, ont pour équations, l'une

$$z = 0,$$

$$\frac{y^2}{b^2 - c^2} + \frac{x^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

l'autre

$$x = 0,$$

$$\frac{z^2}{c^2 - a^2} + \frac{y^2}{b^2 - a^2} = 1.$$

Si l'on considère un point $(x_1 z_1)$ sur la focale qui a pour équation, avec $y = 0$,

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1,$$

on a, pour les valeurs de p et de q correspondantes,

$$2\frac{\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 - c^2}}{ab^2c}\, p = \begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{b^2} & -\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab} \\ \dfrac{z_1}{b^2} & \dfrac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc}\frac{x_1}{b^2} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab}\frac{z_1}{b^2},$$

$$-2\frac{\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 - c^2}}{ab^2c}\, q = \begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{b^2} & +\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab} \\ \dfrac{z_1}{b^2} & \dfrac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc}\frac{x_1}{b^2} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab}\frac{z_1}{b^2},$$

d'où

$$\alpha + 2p = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc}\left(z + \frac{c^2 z_1}{b^2 - c^2}\right) - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab}\left(x - \frac{a^2 x_1}{a^2 - b^2}\right) = 0,$$

$$\beta + 2q = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc}\left(z + \frac{c^2 z_1}{b^2 - c^2}\right) + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab}\left(x - \frac{a^2 x_1}{a^2 - b^2}\right) = 0,$$

pour les plans d'intersection de l'ellipsoïde et de la sphère-foyer $(x_1, 0, z_1)$. L'intersection de ces plans est donc donnée par

$$x - \frac{a^2 x_1}{a^2 - b^2} = 0, \quad z + \frac{c^2 z_1}{b^2 - c^2} = 0,$$

d'où

$$\frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2 - b^2}} = \frac{z - z_1}{-\frac{z_1}{b^2 - c^2}};$$

c'est la directrice correspondant au foyer $(x_1, 0, z_1)$. Le plan du foyer et de la directrice est normal à la focale et coupe la surface suivant une conique qui a le point $(x_1, 0, z_1)$ pour *foyer* et la droite pour *directrice* correspondante.

Je m'arrête, n'ayant pas à développer ici toute la théorie des foyers dans les surfaces du second degré.