NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LEMONNIER

Déterminer le paramètre d'une section parabolique dans un hyperboloïde à une nappe

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 14 (1875), p. 169-171

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__169_0>

DÉTERMINER LE PARAMÈTRE D'UNE SECTION PARABOLIQUE DANS UN HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ l'équation de l'hyperboloïde rapporté à ses axes; soit

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-p=0$$

celle du plan sécant, avec la condition

$$a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^2\gamma^2=0;$$

nous supposerons $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.

Quand la section est une ellipse ou une hyperbole, on a, pour les demi-axes d'une section centrale,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{a^2\alpha^2}{R^2-a^2}+\frac{b^2\beta^2}{R^2-b^2}-\frac{c^2\gamma^2}{R^2+c^2}=0,\\ &R_1^2R_2^2=\frac{-a^2b^2c^2}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^2\gamma^2};\end{aligned}\right.$$

et l'on a pour la section par un plan (p)

$$\frac{R'^2}{R_1^2}=1-\frac{p^2}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^2\gamma^2}=\frac{p^2-a^2\alpha^2-b^2\beta^2+c^2\gamma^2}{c^2\gamma^2-a^2\alpha^2-b^2\beta^2};$$

posons

$$q=\frac{R'^2}{R''}=\frac{R'^3}{R'R''}.$$

Comme on a

$$R'R'' = R_1 R_2 \frac{p^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}{c^2\gamma^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2}$$

$$= abc \frac{p^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}{(c^2\gamma^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$R'^3 = R_1^3 \frac{(p^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}{(c^2\gamma^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

il s'ensuit

$$q = R_1^3 \frac{(p^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}{abc}.$$

De là résulte pour une section parabolique

$$q = R_1^3 \frac{p}{abc},$$

donc

$$R_1 = \left(q\frac{abc}{p}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

En portant cette valeur de R_1 dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}\alpha^2}{(bcq)^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{4}{3}}p^{\frac{2}{3}}} + \frac{b^{\frac{4}{3}}\beta^2}{(acq)^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{4}{3}}p^{\frac{2}{3}}} - \frac{c^{\frac{4}{3}}\gamma^2}{(abq)^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{4}{3}}p^{\frac{2}{3}}} = 0.$$

Si l'on ordonne par rapport à q, on trouve dans le coefficient de $q^{\frac{4}{3}}$ le facteur $a^2\alpha + b^2\beta^2 - c^2\gamma^2$ qui est nul. L'équation se réduit à

$$q^{\frac{2}{3}}[a^2\alpha^2(c^2 - b^2)b^2 + \beta^2(-a^2 + c^2) + c^2\gamma^2(b^2 + a^2)] - (abc)^{\frac{4}{3}}p^{\frac{2}{3}} = 0,$$

de sorte que

$$q^{\frac{2}{3}} = \frac{(abc)^{\frac{4}{3}}p^{\frac{2}{3}}}{a^2\alpha^2(c^2 - b^2) + b^2\beta^2(-a^2 + c^2) + c^2\gamma^2(b^2 + a^2)}$$

$$= \frac{(abc)^{\frac{4}{3}}p^{\frac{2}{3}}}{a^4\alpha^2 + b^4\beta^2 + c^4\gamma^2},$$

et

$$q = \frac{(abc)^2 p}{(a^4\alpha^2 + b^4\beta^2 + c^4\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}:$$

c'est la valeur du demi-paramètre.