Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 130-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__130_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1140

(voir 2e série, t. XIII, p. 208);

PAR M. MEŸL,

Ancien officier d'Artillerie à la Haye (Hollande).

Par les sommets A, B, C *d'un triangle inscrit dans un cercle, on mène des parallèles aux côtés opposés; elles rencontrent la circonférence en des points* A′, B′, C′. *On prolonge les cordes* A′B′, A′C′, B′C′, *qui coupent respectivement les côtés* AB, AC, BC *du triangle donné aux points* c, b, a.

Démontrer que le point de rencontre des hauteurs du triangle abc *est le centre du cercle donné.*

(BROCARD.)

On sait que les droites AA′, BB′, CC′, suffisamment prolongées, forment un triangle $\alpha\beta\gamma$ semblable à ABC, et que le cercle donné est le cercle des neuf points de ce triangle. Or je dis que les points α, β, γ sont respectivement en ligne droite avec bc, ac, ab.

Soit, par exemple, pour le point γ et ab; il suffit de montrer que les triangles baC et $b\gamma$A sont semblables, puisque CbA est une droite et aC parallèle à Aγ.

On a, dans les triangles bCC′ et aCC′,

$$bC : CC' = \sin C : \sin(A - C),$$
$$CC' : aC = \sin(B - C) : \sin(C);$$

d'où

$$(1) \qquad bC : Ca = \sin(B - C) : \sin(A - C),$$

et, dans le triangle bAA′,

$$bA : AA' = \sin(B + C) \quad \text{ou} \quad \sin A : \sin(A - C).$$

Mais on sait que

$$AA' = 2\sin(B - C) \quad \text{et} \quad A\gamma = BC = 2\sin A$$

(le rayon du cercle pris pour unité); par conséquent

$$bA : 2\sin(B - C) = \tfrac{1}{2} A\gamma : \sin(A - C)$$

ou

$$bA : A\gamma = \sin(B - C) : \sin(A - C),$$

et, à cause de l'équation (1),

$$bC : Ca = bA : A\gamma;$$

donc ab et γ sont en ligne droite.

Considérons maintenant l'hexagone inscrit

$$ACBA'C'B'A,$$

dont les côtés opposés AC et A′C′, CB et C′B′, BA et B′A se rencontrent respectivement aux points b, a, γ'. Il s'ensuit que γ' est aussi sur la droite ab; mais, dans le quadrilatère inscrit AA′B′B, le point c est le pôle de $\gamma'\gamma$ ou de ab.

On en conclut que les sommets du triangle *abc* sont les pôles des côtés opposés, par rapport au cercle donné; donc les hauteurs de ce triangle doivent passer par le centre du cercle. C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue, à l'aide des équipollences, par M. L. Bourguet; geométriquement, par M. Chadu; analytiquement, par MM. Lez et Moret-Blanc.

Question 1143

(voir 2e serie, t. XIII, p. 303);

PAR M. C. MOREAU,

Capitaine au 37e d'Artillerie.

Construire une parabole connaissant le sommet, une tangente et un point. (LAISANT.)

La solution de ce problème est une conséquence de la propriété suivante, qui peut se démontrer aisément :

Dans toute parabole, les longueurs dont le pôle et les extrémités d'une corde quelconque sont distants d'une tangente également quelconque sont telles, que la première est moyenne proportionnelle entre les deux autres.

Alors, soient A et M le sommet et le point donnés et I le milieu de la corde AM; le pôle de cette corde est situé, d'une part, sur la circonférence de cercle décrite sur AI comme diamètre, et, d'autre part, sa distance à la tangente donnée est connue par le théorème précédent. Ce point peut donc être déterminé facilement, et, en le joignant au point A, on a la tangente au sommet, etc. (Les deux points A et M doivent être situés d'un même côté de la tangente donnée.)

Il y a en général quatre solutions.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Charles Chabanel; J. Murent, licencié ès sciences; E. Momy, élève du lycee de Bordeaux.

Question 1145

(voir 2e série, t. XIII, p. 304);

PAR M. GENTY.

On donne une surface du second degré et deux points e et e' : par le point e on mène une transversale quelconque rencontrant la surface aux points a et b; par le point e', on mène une parallèle à la transversale; cette parallèle rencontre aux points a' et b' les plans tangents aux points a et b.

Si D *est le diamètre parallèle à la transversale, l'expression*

$$\frac{ea \,.\, e'b' + eb \,.\, e'a'}{D^2}$$

a une valeur constante, quelle que soit la direction de la transversale. (FAURE.)

Soient X, Y, Z les coordonnées du point e; X', Y', Z' celles du point e'; α, β, α', β' les distances ea, eb, $e'a'$ et $e'b'$ respectivement.

Soient enfin

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

l'équation de la surface rapportée à ses trois plans principaux, et λ, μ et ν les angles que la transversale fait avec les axes.

Les longueurs α et β seront les racines de l'équation

$$A(X + x\cos\lambda)^2 + B(Y + x\cos\mu)^2 + C(Z + x\cos\nu)^2 = 1$$

ou

$$(1) \qquad x^2 + 2KD^2x - ID^2 = 0,$$

en remarquant que

$$A\cos^2\lambda + B\cos^2\mu + C\cos^2\nu = \frac{1}{D^2}$$

et en posant

$$K = AX\cos\lambda + BY\cos\mu + CZ\cos\nu,$$
$$I = 1 - AX^2 - BY^2 - CZ^2.$$

L'équation du plan tangent à la surface au point a sera

$$Ax(X + \alpha\cos\lambda) + By(Y + \alpha\cos\mu) + Cz(Z + \alpha\cos\nu) = 1;$$

et la distance a' sera déterminée par l'équation

$$A(X' + \alpha'\cos\lambda)(X - \alpha\cos\lambda) + \ldots = 1$$

ou

$$\alpha'\left(K + \frac{\alpha}{D^2}\right) = I_1 - \alpha K',$$

en posant pour abréger

$$I_1 = 1 - AXX' - BYY' - CZZ'$$
$$K' = AX'\cos\lambda + BY'\cos\mu + CZ'\cos\nu.$$

De l'équation ci-dessus on tire

$$\alpha' = \frac{D^2(I_1 - \alpha K')}{\alpha + KD^2};$$

on trouverait de même

$$\beta' = \frac{D^2(I_1 - \beta K')}{\beta - KD^2}.$$

Or l'équation (1) donne

$$KD^2 = -\frac{\alpha + \beta}{2};$$

donc on a

$$\alpha' = 2\frac{D^2(I_1 - \alpha K')}{\alpha - \beta},$$

$$\beta' = 2\frac{D^2(I_1 - \beta K')}{\beta - \alpha}$$

et, par suite,

$$\frac{\alpha\beta' + \beta\alpha'}{D^2} = -2I_1 = +2(AXX' + BYY' + CZZ' - 1).$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Charles Chabanel.

Question 1146

(voir 2ᵉ série, t XIII, p. 304);

PAR M. CHARLES CHABANEL.

On donne une surface du second degré et deux droites L, M. *Sur la première* L *on prend deux points arbitraires* a, b, *et l'on trace les plans polaires de ces points. Désignons par* c *et* d *les points d'intersection de ces plans avec la seconde* M; *par* e *et* f *les points d'intersection de ces mêmes plans avec le diamètre parallèle à* M : *l'expression*

$$\mathrm{O}e.\mathrm{O}f\,\frac{ab}{cd},$$

dans laquelle O *est le centre de la surface, a une valeur constante.* (FAURE.)

Les plans polaires de tous les points situés sur la droite L passent par une droite fixe P; réciproquement, les pôles de tous les plans qui tournent autour de la droite P sont sur la droite L. Soient donc Q, R deux plans dont la droite P est l'intersection, et qui sont rencontrés par la droite M en des points q, r. Les pôles de ces plans sont deux points s, t situés sur la droite L.

Le rapport anharmonique des points s, t, a, b de la droite L est égal au rapport anharmonique des plans polaires de ces points. Ces plans polaires rencontrent respectivement la droite M en q, r, c, d; on a donc

$$(1)\qquad \frac{qc}{qd}:\frac{rc}{rd}=\frac{sa}{sb}:\frac{ta}{tb}.$$

Si l'on fait passer le plan Q par le centre O, le pôle s de ce plan sera à l'infini de la droite L; on aura, par suite, $\frac{sa}{sb}=1$. Si le plan R devient parallèle à la droite M, le point r sera à l'infini de cette droite, et l'on aura alors $\frac{rc}{rd} = 1$. Pour ces directions particulières des plans Q, R, l'équation (1) se réduit à

$$\frac{qc}{qd} = \frac{tb}{ta}. \tag{2}$$

De cette égalité de rapports on déduit

$$\frac{qc - qd}{qd} = \frac{tb - ta}{ta},$$

ou

$$\frac{dq - qc}{qd} = \frac{at + tb}{ta},$$

ce qui donne

$$ta = -qd\,\frac{ab}{cd}, \tag{3}$$

puis

$$tb = -qc\,\frac{ab}{cd}. \tag{4}$$

Concevons que le point a soit fixe en a_1, et que l'on fasse varier le point b sur la droite L ; soit c_1 la position du point c correspondant à a_1. Dans cette hypothèse, le premier membre de l'équation (3) a une valeur invariable : il en est de même de l'expression

$$qd\,\frac{a_1 b}{c_1 d}$$

et aussi de celle

$$qc_1 . dq\,\frac{a_1 b}{c_1 d}.$$

Si donc b_1, b_2 sont deux positions arbitraires du point b, on a, en désignant par d_1, d_2 les positions correspondantes du point d,

$$qc_1 . qd_1\,\frac{a_1 b_1}{c_1 d_1} = qc_1 . qd_2\,\frac{a_1 b_2}{c_1 d_2}. \tag{5}$$

Supposons maintenant que le point b soit fixe en b_2; à cause de l'équation (4), l'expression

$$qc.qd_2\,\frac{ab_2}{cd_2}$$

sera constante pour toutes les positions du point a; en donnant à ce point deux positions a_1, a_2, et en désignant par c_1, c_2 les positions correspondantes du point c, on a

$$(6)\qquad qc_1.qd_2\,\frac{a_1b_2}{c_1d_2}=qc_2.qd_2\,\frac{a_2b_2}{c_2d_2}.$$

Des équations (5) et (6) on conclut que

$$(7)\qquad qc_1.qd_1\,\frac{a_1b_1}{c_1d_1}=qc_2.qd_2\,\frac{a_2b_2}{c_2d_2},$$

équation qui fait voir que la valeur de l'expression $qc.qd\,\frac{ab}{cd}$ est indépendante de la position arbitraire des points a, b.

Soit I le point où la droite P perce le plan déterminé par la droite M et le centre O. Choisissons ce plan pour plan de la figure.

Les plans polaires des points a, b sont coupés suivant les droites Ic, Id, qui rencontrent en e, f le diamètre parallèle à la droite M. On sait que le plan Q passe par le centre O; par suite, ce point est situé sur la droite Iq. Les triangles IOe, Iqc sont semblables, ainsi que ceux IOf, Iqd. On a donc les égalités de rapports

$$\frac{Oe}{qc}=\frac{Of}{qd}=\frac{IO}{Iq},$$

d'où l'on déduit

$$Oe.Of=\left(\frac{IO}{Iq}\right)^2 qc.qd,$$

puis

$$(8) \qquad \mathrm{O}e.\mathrm{O}f\,\frac{ab}{cd} = \left(\frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{I}q}\right)^2 qc.qd\,\frac{ab}{cd}.$$

Or le rapport $\frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{I}q}$ est indépendant de la position arbitraire des points a, b; on a vu qu'il en est de même de $qc.qd\,\frac{ab}{cd}$. Par suite, l'expression proposée a une valeur constante.

Note. — La même question a ete resolue par MM. Genty, Gambey et Moret-Blanc.

Question 1148

(voir 2e série, t XIII, p 399).

PAR M. C. CHADU.

1° *Soient* O *le centre du cercle circonscrit à un triangle* ABC; H *le point de concours des hauteurs*, I *le centre du cercle inscrit;* R *le rayon du cercle circonscrit à* ABC; *on a*

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\mathrm{OI}}^2 &= \mathrm{R}^2\left(1 - 8\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2}\right), \\ \overline{\mathrm{OH}}^2 &= \mathrm{R}\ (1 - 8\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}), \\ \overline{\mathrm{IH}}^2 &= \mathrm{R}^2\left(8\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}\sin^2\frac{\mathrm{B}}{2}\sin^2\frac{\mathrm{C}}{2} - \cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}\right). \end{aligned} \right.$$

2° *Si* r *est le rayon du cercle inscrit au triangle* ABC, *et* R' *le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par les tangentes en* A, B, C, *on a*

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\mathrm{OI}}^2 &= \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}r \quad \text{(relation connue)}, \\ \overline{\mathrm{OH}}^2 &= \mathrm{R}^2 - 2\frac{\mathrm{R}^3}{\mathrm{R}'}, \\ \overline{\mathrm{IH}}^2 &= 2r^2 - \frac{\mathrm{R}^3}{\mathrm{R}'}. \end{aligned} \right.$$

(L. PAINVIN.)

I. Remarquons que l'angle OAH est égal à B — C, et que la ligne AI est la bissectrice de cet angle. De plus on a

$$AH = 2R\cos A,$$

$$AI = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Cela posé, le triangle OAI donne

$$\overline{OI}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AI}^2 - 2OA.AI\cos\frac{B-C}{2},$$

par suite

$$\overline{OI}^2 = R^2 + 16R^2\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - 8R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

En développant $\cos\frac{B-C}{2}$ et réduisant, il vient

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 8R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B+C}{2},$$

$$\overline{IO}^2 = R^2\left(1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right).$$

Le triangle OAH donne

$$\overline{OH}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AH}^2 - 2OA\,.\,AH\cos(B-C),$$

par suite

$$\overline{OH}^2 = R^2 + 4R^2\cos^2 A - 4R^2\cos A\cos(B-C),$$

$$\overline{OH}^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C).$$

Le triangle IAH donne

$$\overline{IH}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AI}^2 - 2AH.AI\cos\frac{B-C}{2},$$

par suite

$$\overline{IH}^2 = 4R^2\cos^2 A + 16R^2\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$

$$- 16R^2\cos A\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B-C}{2},$$

$$= 4R^2\left(\cos^2 A + 4\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\right.$$

$$\left. - \cos A\sin B\sin C - 4\cos A\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\right),$$

$$= 4R^2\left[\cos A(\cos A - \sin B\sin C)\right.$$

$$\left. + 4\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}(1-\cos A)\right],$$

$$= 4R^2\left(8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - \cos A\cos B\cos C\right).$$

II. Pour établir les secondes formules, cherchons la relation qui existe entre R et le rayon R′ du triangle A′B′C′ formé par les tangentes en A, B, C.

On a

$$C'B = R\tan C,$$

$$A'B = R\tan A,$$

par suite,

$$b' = R(\tan A + \tan C).$$

D'un autre côté, on a

$$b' = 2R'\sin B' = 2R'\sin 2B,$$

d'où

$$R(\tan C + \tan A) = 2R'\sin 2B$$

et

$$R = 4R'\cos A\cos B\cos C.$$

On a d'ailleurs, dans le triangle ABC, la relation

$$R = \frac{r}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}};$$

de ces relations on tire

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{R}{4R'},$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}.$$

En remplaçant ces produits par leurs valeurs dans les relations (1), on en déduit immédiatement les relations (2).

Note. — La même question a été résolue par MM. L. Goulin, élève du lycée de Rouen; Moret-Blanc; E. Rebuffel, élève du lycée de Rennes; E. Kruschwitz; B. Launoy; P. S., de Cherbourg; Genty; Gambey; Ch. Contet; Étienne Gatti, étudiant à l'Université de Turin.

Question 1151

(voir 2e série, t. XIII, p. 400);

PAR M. SOUBEIRAN,

Élève du lycée Fontanes.

Deux sommets A, B *d'un triangle* ABC *sont supposés fixes; le troisième sommet* C *se déplace dans le plan du triangle de façon que le pied de la bissectrice de l'angle* A *décrive une droite donnée. Trouver le lieu géométrique du point* C.

(HARKEMA.)

Nous emploierons les coordonnées trilinéaires.

Nous prendrons comme triangle de référence le triangle formé par la droite donnée $\alpha = 0$ ou DE, par la droite $\beta = 0$ ou AB, et par la perpendiculaire en A au côté AB; soit $\gamma = 0$.

Les coordonnées du point B seront

$$\beta = 0, \quad \gamma + m\alpha = 0.$$

Si nous représentons par 2ω l'angle que fait la droite AC avec la droite AB, l'équation de la droite AC sera

(1) $$\beta = \gamma \operatorname{tang} 2\omega.$$

L'équation de la bissectrice de l'angle A est d'ailleurs

$$\beta = \gamma \operatorname{tang} \omega.$$

L'équation de la droite passant par le point B et le point de rencontre de la bissectrice avec la droite $\alpha = 0$ est donc

(2) $$\beta - \operatorname{tang}\omega(\gamma + m\alpha) = 0;$$

donc, si entre cette équation et celle de AC nous éliminons l'angle ω, nous aurons le lieu du point C.

On tire de (2)

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\beta}{\gamma + m\alpha};$$

on tire de (1)

$$\frac{\beta}{\gamma} = \operatorname{tang} 2\omega = \frac{2 \operatorname{tang}\omega}{1 - \operatorname{tang} 2\omega};$$

d'où

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\frac{2\beta}{\gamma + m\alpha}}{1 - \frac{4\beta^2}{(\gamma + m\alpha)^2}},$$

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{2\beta(\gamma + m\alpha)}{(\gamma + m\alpha)^2 - \beta^2}.$$

Cette équation se décompose en celle d'une droite $\beta = 0$ et celle d'une conique

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{2(\gamma + m\alpha)}{(\gamma + m\alpha)^2 - \beta^2},$$

qui prend les formes

$$(\gamma + m\alpha)^2 - \beta^2 = 2\gamma(m\alpha + \gamma),$$

$$(\gamma + m\alpha)(m\alpha - \gamma) = \beta^2.$$

On voit donc que les droites

$$\gamma + m\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \gamma - m\alpha = 0$$

sont tangentes à la conique en leurs points de rencontre avec la droite $\beta = 0$ ou AB.

La conique peut d'ailleurs se mettre sous la forme

$$m^2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2;$$

donc la conique a pour foyer le sommet A et pour directrice la droite $\alpha = 0$ ou DE.

On aura une ellipse quand m sera inférieur à l'unité, c'est-à-dire quand le point B sera compris entre les pieds des bissectrices des deux angles formés par les droites $\alpha = 0$ ou DE et $\beta = 0$ ou AD.

On aura une parabole quand m sera égal à l'unité, c'est-à-dire quand le point B se trouvera sur l'une de ces deux bissectrices.

On aura une hyperbole quand m sera inférieur à l'unité.

Note. — La même question a été résolue par MM. Henry Poidatz, soldat au 134e de ligne; A. Pellissier; Ch. Contet; P. S., de Cherbourg; Rebuffel, élève du lycée de Rennes; B. Launoy; Moret-Blanc; Chadu, professeur au lycée de Mont-de-Marsan; H. Lez; H. Brocard; G. Vandame, élève du lycée de Lille; A. Tourrettes; Jacob, élève du lycée de Dijon; Gambey; C. Moreau; Astor; L. Goulin et Henri Garreta, élèves du lycée de Rouen.

Omission. — Nous avons reçu, trop tard pour la mentionner, une solution de la question 1081, par M. Léopold Klug, élève du séminaire de Budapest (Hongrie).