NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. TOURRETTES

Solution d'une question du concours d'agrégation de 1872

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 99-103

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__99_1>

SOLUTION D'UNE QUESTION DU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1872;

PAR M. A. TOURRETTES.

Déterminer une courbe plane, telle que l'ordonnée y du centre de gravité d'un arc quelconque s, à partir d'une origine fixe, soit une fonction donnée de la longueur de l'arc, la densité ρ en chaque point étant elle-même une fonction donnée de l'arc.

Effectuer les calculs et discuter la courbe, en supposant $\rho = \frac{1}{4}s^3$, $y = s^2$. On pourra examiner, en posant $\rho = ks^m$, $y = hs^\mu$, à quelle condition doivent satisfaire les nombres m et μ, pour que l'intégration puisse être effectuée.

Soit y_1 l'ordonnée du centre de gravité d'un arc de courbe $s = \mathrm{OM}$, compté à partir de l'origine des coordonnées, que je suppose sur la courbe.

J'aurai

$$y_1 = \frac{\int \rho\, y\, ds}{\int \rho\, ds};$$

posons

$$y_1 = \mathrm{F}(s), \quad \rho = f(s),$$

et il viendra

$$\mathrm{F}(s) \int f(s)\, ds = \int y f(s)\, ds.$$

Différentiant les deux membres de l'équation, il vient

$$\mathrm{F}'(s)\, ds \int f(s)\, ds + \mathrm{F}(s) f(s)\, ds = y f(s)\, ds,$$

d'où

$$(1) \qquad y = \frac{\mathrm{F}'(s) \int f(s)\, ds}{f(s)} + \mathrm{F}(s).$$

Telle est l'équation générale des courbes demandées, en fonction de y et de la longueur de l'arc.

Pour avoir cette équation entre x et y, je pose

$$y = \varphi(s), \quad \text{d'où} \quad dy = \varphi'(s)\, ds,$$

et, par suite,

$$(2) \qquad x + c = \int ds \sqrt{1 - [\varphi'(s)]^2};$$

en éliminant s entre l'équation (1) et (2), on aura l'équation en x et y.

Passons au cas particulier où

$$\mathrm{F}(s) = s^2, \quad f(s) = \tfrac{1}{4} s^3.$$

L'équation (1) donne

$$y = \frac{2s \int \frac{1}{4} s^3\, ds}{\frac{1}{4} s^3} + s^2,$$

et

$$y = \frac{2}{3} s^2, \quad \text{ou bien} \quad dx = \sqrt{\frac{1 - 6y}{6y}}\, dy;$$

c'est l'équation d'une cycloïde, dont le diamètre du cercle générateur est $\frac{1}{6}$ et dont l'axe est l'axe des y.

Prenons maintenant le cas où $F(s) = hs^{\mu}$, $f(s) = ks^{m}$. Substituant dans l'équation (1), il vient

$$y = \frac{\mu hs^{\mu-1}\int ks^{m}ds}{ks^{m}} + hs^{\mu},$$

ou

$$y = \left(\frac{\mu}{m+1} + 1\right) hs^{\mu}.$$

Telle est l'équation entre l'ordonnée et la longueur de l'arc.

Cherchons l'équation différentielle en x et y. On tire de l'équation précédente

$$y^{\frac{1}{\mu}} = h^{\frac{1}{\mu}}\left(\frac{\mu+m+1}{m+1}\right)^{\frac{1}{\mu}} s,$$

et, en différentiant les deux membres,

$$\frac{1}{\mu}\, y^{\frac{1}{\mu}-1} dy = h^{\frac{1}{\mu}}\left(\frac{\mu+m+1}{m+1}\right)^{\frac{1}{\mu}} ds.$$

Posons

$$h^{\frac{1}{\mu}}\left(\frac{\mu+m+1}{m+1}\right)^{\frac{1}{\mu}} = \lambda,$$

et remplaçons ds par sa valeur $dy\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}$, il vient, après avoir supprimé dy, qui donne une parallèle à l'axe des x, laquelle ne répond pas, évidemment, à la question,

$$\frac{1}{\mu}\, y^{\frac{1}{\mu}-1} = \lambda\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}},$$

d'où

$$(3) \qquad dx = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{\mu^2}\, y^{2\left(\frac{1}{\mu}-1\right)} - \lambda^2\right]^{\frac{1}{2}} dy :$$

c'est l'équation différentielle cherchée.

Le second membre est une différentielle binôme ; appliquons les caractères d'intégrabilité. Le premier caractère donne

$$\frac{1}{2\left(\frac{1}{\mu}-1\right)}=\frac{1}{2}\,\frac{\mu}{1-\mu},$$

qui doit être entier ; le deuxième caractère donne

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mu}{1-\mu}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\mu},$$

qui doit aussi être un nombre entier. On voit que m n'y entre pas. Posons, n étant un entier,

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mu}{1-\mu}=n,$$

d'où

$$\mu=\frac{n}{\frac{1}{2}+n}. \tag{4}$$

Donnant à n toutes les valeurs entières, positives ou négatives, on aura pour μ des valeurs qui répondent à des cas d'intégrabilité.

La deuxième formule donnerait

$$\mu=1-\frac{1}{2n}. \tag{5}$$

Si nous faisons, dans l'équation (4), $n=-1$, on a $\mu=2$, c'est le cas considéré en premier lieu. Pour $n=1$, $\mu=\frac{2}{3}$, et alors l'équation (3) devient

$$dx=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{9}{4}y-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}dy,$$

$$x=\frac{8}{27\lambda}\left(\frac{9}{4}y-\lambda^2\right)^{\frac{3}{2}},$$

la constante étant déterminée par la condition que, pour $y = \frac{4}{9}\lambda^2$, $x = 0$.

La formule (5), pour $n = 1$, donne

$$\mu = \tfrac{1}{2};$$

par suite

$$dx = \frac{1}{\lambda}(4y^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}\,dy,$$

dont l'intégrale est

$$x = \frac{1}{2}\left[y\sqrt{4y^2 - \lambda^2} - \frac{\lambda^2}{2}\,\mathrm{L}\left(2y + \sqrt{4y^2 - \lambda^2}\right)\right] + \text{const}.$$

On détermine la constante par la condition que, pour $x = 0$, $y = \frac{\lambda}{2}$; on trouve

$$\text{const.} = \frac{\lambda^2}{4}\,\mathrm{L}\,\frac{\lambda}{2}.$$