CHEVILLIET

Note sur l'attraction proportionnelle à la distance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 97-99

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__97_1>

NOTE SUR L'ATTRACTION PROPORTIONNELLE A LA DISTANCE;

PAR M. CHEVILLIET.

L'attraction proportionnelle à la distance est la seule pour laquelle la durée des oscillations rectilignes soit indépendante de l'amplitude.

Soit $f(x)$ l'attraction, on a

$$dv^2 = -2f(x)\,dx,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -2\int_0^x f(x)\,dx + c$$

et, en posant $\int_0^x f(x)\,dx = y$,

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -2y + c.$$

Soit h la valeur de y pour l'abscisse a répondant à l'écart maximum; la vitesse étant nulle alors, on a

$$0 = -2h + c,$$

d'où

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 2(h - y),$$

$$dt\sqrt{2} = \frac{-dx}{\sqrt{h-y}}$$

et, pour la durée de la demi-oscillation,

$$t\sqrt{2} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{h-y}},$$

ou, si l'on pose $x = \varphi(y)$,

$$t\sqrt{2} = \int_0^h \frac{\varphi'(y)dy}{\sqrt{h-y}}.$$

Ainsi le problème est identique avec celui de la tautochrone; on trouvera donc de la même manière

$$x = 2c\sqrt{y},$$

d'où

$$y = \frac{x^2}{4c^2},$$

et la force

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2c},$$

C. Q. F. D.

Plus généralement : *L'attraction proportionnelle à la distance est la seule qui puisse faire décrire au mobile une courbe toujours fermée, dans un temps toujours le même, quelles que soient les conditions initiales.*

La démonstration se déduit facilement de ce qui précède, si l'on suppose la courbe symétrique par rapport à deux axes rectangulaires passant par le centre d'attraction; car alors la projection du mobile sur l'un des axes exécute, autour du centre, des oscillations dont la durée est indépendante de l'amplitude : par conséquent la force qui produit son mouvement est proportionnelle à la distance au centre; mais la force qui agit sur le mobile lui-même et le rayon vecteur mené du centre à ce point sont dans le même rapport que leurs projections, ce qui établit la proposition énoncée.

La restriction que nous avons dû faire ici n'est pas nécessaire ; mais pour le prouver nous avons dû recourir à d'autres considérations, comme on le verra dans une autre Note.

Remarque. — Dans le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe proportionnellement à la distance :

1° *La somme des carrés des axes de la trajectoire est indépendante de la direction de la vitesse initiale*

$$a^2 + b^2 = \frac{v_0^2}{\mu} + r_0^2;$$

2° *Leur produit ne dépend pas de la composante suivant le rayon vecteur de cette vitesse*

$$ab = \frac{r_0 v_0 \sin \alpha}{\sqrt{\mu}}.$$