Nouvelles annales de mathématiques

Eugène Heurtault

Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École polytechnique en 1873

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 93-97

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__93_0>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1873;

PAR M. EUGÈNE HEURTAULT,
Élève du collége Stanislas.

On donne un cercle et un point A, *et l'on demande le lieu des centres des hyperboles équilatères assujetties à passer par le point donné* A *et à toucher en deux points le cercle donné.*

On discutera la courbe obtenue pour les différentes positions du point A, *et l'on démontrera que, dans le cas général, les points de contact des tangentes qu'on peut mener au lieu par le point* A *sont situés sur une circonférence de cercle.*

1° Soit r le rayon du cercle; l'équation générale des coniques doublement tangentes est

$$x^2 + y^2 - r^2 - \lambda\,(x\cos\omega + y\sin\omega - p)^2.$$

La double condition de représenter des hyperboles équilatères et de passer par le point A, que je suppose situé sur l'axe des x, me donne, en désignant par k^2 la puissance de A,

$$p = a\cos\omega - \frac{k}{\sqrt{2}}.$$

p est la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur la droite des contacts : cette perpendiculaire est un axe de symétrie pour l'hyperbole équilatère tangente en C et D. Les deux droites OC et OD étant des normales, il en résulte, d'après une propriété connue, que $OO' = 2p$, O' étant le centre de l'hyperbole. Donc l'équation lieu du point O' est

$$\rho = 2a\cos\omega - k\sqrt{2}.$$

Ce lieu représente une conchoïde du cercle décrit du point A comme centre, avec la longueur AO pour rayon. Il suffit donc de diminuer les rayons vecteurs relatifs à ce cercle de la constante $k\sqrt{2}$.

Le point A ne peut occuper que trois positions : il peut être extérieur ou intérieur au cercle et, comme position intermédiaire, sur le cercle.

S'il est extérieur, on obtient la courbe précédente; s'il est sur le cercle, $k = 0$, et le lieu devient le cercle $\rho = 2a\cos\omega = 2r\cos\omega$; enfin, s'il est intérieur, le lieu devient imaginaire, puisque la constante est $k\sqrt{2}\sqrt{-1}$.

Pour établir que les points de contact des tangentes menées de A au lieu sont sur un cercle, je transforme en coordonnées cartésiennes et j'obtiens

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - 2k^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Je transporte l'origine en A, et j'écris que la première polaire de l'origine est $f'_z = 0$, ce qui donne

$$2a^2(x^2 + y^2) + 2k^2[(x + a)^2 + y^2] - a^4 = 0,$$

ce qui est un cercle. En revenant à l'origine primitive, ce cercle devient

$$2a^2[(x - a)^2 + y^2] + 2k^2(x^2 + y^2) - a^4 = 0$$

ou

$$2(a^2 + k^2)(x^2 + y^2) - 4a^3x + a^4 = 0.$$

2° Étudions maintenant le lieu des foyers (*). J'observe qu'il y a deux sortes d'hyperboles à considérer : celles

(*) Cette partie est en dehors de la question.

pour lesquelles les points de contact sont sur une même branche, et celles pour lesquelles les points de contact sont sur deux branches différentes. Donc il y a deux lieux de foyers : je ne parle que des foyers réels.

Dans le premier cas, les foyers F et F' et le centre C sont sur le même rayon vecteur.

On a, en désignant OF par ρ et par P le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur OC,

$$(\rho - \mathrm{OC})^2 = 2\left(\overline{\mathrm{CP}}^2 - \overline{\mathrm{AP}}^2\right).$$

Mais

$$\mathrm{CP} = \mathrm{OP} - \mathrm{OC} = -a\cos\omega + k\sqrt{2},$$

car

$$\mathrm{OC} = 2a\cos\omega - k\sqrt{2}.$$

L'équation polaire du lieu du point F est donc

$$\left[\rho - \left(2a\cos\omega - k\sqrt{2}\right)\right]^2 = 2\left[\left(a\cos\omega - k\sqrt{2}\right)^2 - a^2\sin^2\omega\right],$$

ou, toutes réductions faites,

$$\rho^2 - 2\left(2a\cos\omega - k\sqrt{2}\right) + 2r^2 = 0.$$

La construction de cette courbe est très-simple. En effet,

$$\rho = 2a\cos\omega - k\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(2a\cos\omega - k\sqrt{2}\right)^2 - 2r^2},$$

$$\rho = \mathrm{OC} \pm \sqrt{\mathrm{OC}^2 - 2r^2};$$

on décrira à chaque instant un cercle sur OC comme diamètre, dont on prendra l'intersection avec le cercle décrit du point O avec $r\sqrt{2}$ pour rayon. En désignant par I l'un des points de rencontre, on aura

$$\rho = \mathrm{OC} \pm \mathrm{CI}.$$

Pour que le radical soit réel, il faut que $\mathrm{OC}^2 - 2r^2 > 0$, ce qui exige que le point C soit extérieur au cercle de rayon $r\sqrt{2}$, qui est, comme on le sait, le lieu des sommets des angles droits circonscrits au cercle de rayon r. Ce cercle rencontre le limaçon en quatre points qui limitent les régions, pour lesquelles les foyers sont distribués comme dans notre hypothèse.

Dans le second cas, les foyers F, F′ sont sur une perpendiculaire à OC.

On a

$$2\left(\overline{AP}^2 - \overline{CP}^2\right) = CF^2.$$

En désignant par ω l'angle AOP,

$$AP = a \sin\omega, \quad CP = OC + OP;$$

mais

$$OC = -\left(2a\cos\omega + k\sqrt{2}\right) \quad \text{et} \quad OP = a\cos\omega;$$

en substituant, on obtient

$$\overline{CF}^2 = 2\left[a^2\sin^2\omega - (a\cos\omega + k\sqrt{2})^2\right].$$

J'écris au-dessous le carré de OC

$$\overline{OC}^2 = \left(2a\cos\omega + k\sqrt{2}\right)^2;$$

j'additionne, et je trouve que la somme des seconds membres est constante et égale à $2a^2 - 2k^2$; donc

$$\overline{OC}^2 + \overline{OF}^2 = 2a^2 - 2k^2 = 2r^2 = \overline{OF}^2.$$

Le lieu des points F, F′ est donc le cercle décrit de O comme centre, avec $r\sqrt{2}$. Ce cercle passe par les quatre points limites dont nous avons parlé plus haut : il en résulte que tous les points du limaçon intérieurs au cercle de rayon $r\sqrt{2}$ correspondent à des hyperboles pour lesquelles les points de contact sont sur deux branches différentes.

On aurait pu traiter le lieu des sommets d'une manière analogue.

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey; A. Pellissier; B. Launoy, maître auxiliaire au lycée de Lille.