Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École normale en 1873

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 88-92

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__88_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1873.

Étant donnés une ellipse A *et un point* P *dans son plan, de ce point* P *on mène des normales à l'ellipse* A *et l'on considère la conique* B *qui passe par le point* P *et les pieds des quatre normales :*

1° *Trouver les coordonnées des centres de cette conique* B *et celles de ses foyers ;*

2° *Trouver le lieu* C *du centre et le lieu* D *des foyers de la conique* B, *lorsque l'ellipse* A *varie de manière que ses foyers restent fixes ;*

3° *Trouver le lieu des points d'intersection du lieu* D *et de la droite* OP, *lorsque le point* P *décrit un cercle de rayon donné* R^2, *et ayant pour centre le centre* O *de l'ellipse* A.

1° Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l'équation de l'ellipse A et

$$x=\alpha,\quad y=\beta$$

celles du point P. On sait que la conique B a pour équation

$$c^2xy+b^2\beta x-a^2\alpha y=0,$$

et que, l'équation générale d'une conique étant

$$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

les coordonnées du centre satisfont aux équations

$$(1)\qquad \tfrac{1}{2}f'_x=0,\quad \tfrac{1}{2}f'_y=0,$$

et celles des foyers aux suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}(\tfrac{1}{2}f'_x)^2-(\tfrac{1}{2}f'_y)^2&=(A-C)f,\\ (\tfrac{1}{2}f'_x)(\tfrac{1}{2}f'_y)&=Bf.\end{aligned}\right.$$

En appliquant les formules (1), on trouve, pour déterminer le centre,

$$c^2y+b^2\beta=0,\quad c^2x-a^2\alpha=0,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{a^2\alpha}{c^2}, \quad y = \frac{b^2\beta}{c^2}.$$

En appliquant les formules (2), on trouve, pour déterminer les foyers,

$$(c^2y + b^2\beta)^2 - (c^2x - a^2\alpha)^2 = 0,$$
$$(c^2y + b^2\beta)(c^2x - a^2\alpha) = 2c^2(c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y),$$

ou

$$(c^2y + b^2\beta)^2 - (c^2x - a^2\alpha)^2 = 0,$$
$$(c^2y + b^2\beta)(c^2x - a^2\alpha) + 2a^2b^2\alpha\beta = 0.$$

Ces équations se décomposent en les deux systèmes suivants :

$$(c^2y + b^2\beta) + (c^2x - a^2\alpha) = 0,$$
$$(c^2y + b^2\beta)(c^2x - a^2\alpha) + 2a^2b^2\alpha\beta = 0,$$

et

$$(c^2y + b^2\beta) - (c^2x - a^2\alpha) = 0,$$
$$(c^2y + b^2\beta)(c^2x - a^2\alpha) + 2a^2b^2\alpha\beta = 0.$$

On tire du premier

$$x_1 = \frac{a^2\alpha + ab\sqrt{2\alpha\beta}}{c^2}, \quad y_1 = \frac{-b^2\beta - ab\sqrt{2\alpha\beta}}{c^2},$$

$$x_2 = \frac{a^2\alpha - ab\sqrt{2\alpha\beta}}{c^2}, \quad y_2 = \frac{-b^2\beta + ab\sqrt{2\alpha\beta}}{c^2},$$

et du second

$$x_3 = \frac{a^2\alpha + ab\sqrt{-2\alpha\beta}}{c^2}, \quad y_3 = \frac{-b^2\beta + ab\sqrt{-2\alpha\beta}}{c^2},$$

$$x_4 = \frac{a^2\alpha - ab\sqrt{-2\alpha\beta}}{c^2}, \quad y_4 = \frac{-b^2\beta - ab\sqrt{-2\alpha\beta}}{c^2}.$$

2° Pour avoir le lieu C du centre, on élimine a^2 et b^2 entre les équations

$$c^2y + b^2\beta = 0, \quad c^2x - a^2\alpha = 0, \quad a^2 = b^2 + c^2;$$

il vient

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1,$$

équation d'une droite facile à construire.

Pour avoir le lieu D des foyers, on élimine a^2 et b^2 entre les équations

$$(c^2y+b^2\beta)+(c^2x-a^2\alpha)=0,$$

$$(c^2y+b^2\beta)(c^2x-a^2\alpha)+2a^2b^2\alpha\beta=0,\quad a^2=b^2+c^2;$$

il vient

$$2\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\alpha}-1\right)\left(\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\beta}-1\right)=\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1\right)^2.$$

En éliminant de même a^2 et b^2 entre les équations

$$(c^2y+b^2\beta)-(c^2x-a^2\alpha)=0,$$

$$(c^2y+b^2\beta)(c^2x-a^2\alpha)+2a^2b^2\alpha\beta=0,\quad a^2=b^2+c^2,$$

il viendrait

$$-2\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\alpha}-1\right)\left(\frac{x}{\beta}-\frac{y}{\beta}+1\right)=\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1\right)^2,$$

équations de coniques faciles à construire.

3° Pour obtenir le dernier lieu, il faut éliminer α et β entre les équations

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta},\quad \alpha^2+\beta^2=R^2,$$

$$2\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\alpha}-1\right)\left(\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\beta}-1\right)=\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1\right)^2.$$

On tire des deux premières

$$\alpha=\frac{Rx}{\pm\sqrt{x^2+y^2}},\quad \beta=\frac{Ry}{\pm\sqrt{x^2+y^2}},$$

et, en portant dans la dernière, il vient

$$2(x^2+y^2)^2\mp 2R(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}+R^2xy=0.$$

Passons aux coordonnées polaires, on a

$$4\rho^2 \mp 4R\rho + R^2 \sin 2\omega = 0,$$

ou

$$(2\rho \mp R)^2 = R^2(\sin\omega - \cos\omega)^2,$$

ce qui donne les courbes

$$(3) \qquad \begin{cases} 2\rho = \pm R(1 + \sin\omega - \cos\omega), \\ 2\rho = \pm R(1 - \sin\omega + \cos\omega). \end{cases}$$

En éliminant α et β entre les équations

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = R^2,$$

$$-2\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{x}{\beta} - \frac{y}{\beta} + 1\right) = \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1\right)^2,$$

on trouverait, d'une manière analogue,

$$2(x^2 + y^2)^2 \mp 2R(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} - R^2 xy = 0,$$

et, en passant aux coordonnées polaires,

$$(4) \qquad \begin{cases} 2\rho = \pm R(1 + \sin\omega + \cos\omega), \\ 2\rho = \pm R(1 - \sin\omega - \cos\omega). \end{cases}$$

Prenons pour axes les bissectrices des angles des axes actuels, ce qui revient à changer ω en $\frac{\pi}{4} + \omega$, les équations (3) et (4) deviennent

$$2\rho = \pm R(1 \pm \sqrt{2}\sin\omega), \quad 2\rho = \pm R(1 \pm \sqrt{2}\cos\omega),$$

et il est aisé d'y reconnaître quatre limaçons de Pascal.

Ch. B.

Note. — Solution analogue par M. Moret-Blanc.