J. MOUTIER

Sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 65-69
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__65_0>

SUR LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ A LA SURFACE DES CORPS CONDUCTEURS

(voir même tome, p. 51);

PAR M. J. MOUTIER.

Surfaces de niveau. — La résultante des forces répulsives exercées en chaque point d'un conducteur étant normale à la surface du conducteur, il en résulte que cette surface est une surface de niveau.

M. Chasles appelle *points, correspondants,* sur deux surfaces de niveau, deux points situés sur une ligne trajectoire orthogonale à toutes ces surfaces, et *éléments superficiels correspondants,* sur deux surfaces de niveau, les éléments compris dans un canal infiniment étroit, dont les arêtes sont toutes des lignes trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau. M. Chasles a établi que les attractions d'un corps sur deux éléments superficiels correspondants sont égales (*); il est aisé de retrouver cette propriété au moyen du théorème qui sert de point de départ à cette étude.

Considérons, en effet, une surface fermée limitée, d'une part, par deux éléments superficiels correspondants, d'autre part, par le canal infiniment étroit considéré tout à l'heure. Soient F et F' les attractions exercées sur les deux éléments correspondants; ces forces sont normales aux éléments. D'ailleurs, les attractions exercées sur les éléments superficiels du canal infiniment étroit sont dirigées suivant les éléments et ne fournissent aucune composante normale à ces éléments. Par conséquent,

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 25e cahier.

d'après le théorème cité,

$$F - F' = 0.$$

Action d'une sphère homogène sur un point extérieur. — On peut déduire des considérations précédentes la loi d'attraction d'une sphère homogène sur un point extérieur.

Les surfaces de niveau sont alors des sphères concentriques; les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau sont les rayons de la sphère prolongés.

Considérons deux éléments correspondants ω, ω' à des distances du centre de la sphère r et r' :

$$\frac{\omega}{r^2} = \frac{\omega'}{r'^2}.$$

Appelons, comme précédemment, F et F' les attractions exercées sur ces deux éléments; soient, de plus, f et f' les attractions en un point de chacun de ces éléments ou les attractions de la sphère en deux points situés à des distances du centre r et r',

$$F = f\omega, \quad F' = f'\omega'.$$

Puisque $F = F'$,

$$\frac{f}{f'} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{r'^2}{r^2}.$$

Si l'on suppose la distance r' assez grande pour que l'on puisse regarder la distance d'un point situé à la distance r' du centre de la sphère comme égale à la distance de ce point à un point quelconque de la sphère, en appelant M la masse de la sphère,

$$f' = \frac{M}{r'^2}.$$

D'après la relation précédente,

$$f = \frac{M}{r^2}.$$

Théorème. — *Lorsque des conducteurs renferment respectivement des quantités égales des deux fluides, tous ces conducteurs sont à l'état neutre.*

Considérons un élément ω pris sur la surface de l'un des conducteurs, et un élément correspondant ω' situé à une distance suffisamment grande du système de conducteurs, pour que l'on puisse considérer un point de cet élément comme étant à la même distance de toutes les molécules électrisées. L'action exercée sur l'élément ω' est nulle; il en est de même de l'action exercée sur ω, d'après un théorème précédent; par conséquent, l'épaisseur électrique est nulle en chaque point de l'élément ω, et, par suite, dans toute l'étendue du conducteur.

Ce théorème a été établi d'abord par Gauss dans le cas d'un conducteur unique, puis par M. Liouville dans le cas d'un système quelconque de conducteurs, au moyen de considérations différentes (*).

Théorème. — *La distribution électrique ne peut avoir lieu que d'une seule manière à la surface des conducteurs.*

Supposons, en effet, une quantité d'électricité en équilibre sur un conducteur; soit e l'épaisseur électrique en un point M du conducteur. Supposons que la même quantité d'électricité puisse être distribuée d'une autre manière sur le conducteur; soit e' la nouvelle épaisseur électrique au point M.

Considérons cette seconde distribution : l'équilibre

(*) *Additions à la Connaissance des temps*, p. 34; 1845.

subsistera si l'on change le signe de l'électricité en chaque point de chaque conducteur. Superposons ce dernier état d'équilibre au premier; nous aurons un nouvel état d'équilibre auquel correspond l'épaisseur électrique $e - e'$ au point M. Mais tous les conducteurs renferment alors des quantités égales des deux fluides; d'après le théorème précédent, les conducteurs sont à l'état naturel, et, en chaque point M,

$$e - e' = 0.$$

THÉORÈME. — *La distribution électrique est indépendante de la quantité d'électricité.*

Supposons un système de conducteurs électrisés en équilibre; si l'on multiplie l'épaisseur électrique en chaque point par une quantité constante, on obtient une nouvelle couche qui n'exerce aucune action sur les points intérieurs de chaque conducteur; cette couche est donc une couche électrique en équilibre. Mais, d'après le théorème précédent, la distribution de la nouvelle quantité d'électricité ne peut avoir lieu que d'une seule manière; de sorte que, si les conducteurs électrisés renferment des quantités inégales d'électricité, il existe nécessairement un rapport constant entre les épaisseurs électriques en chaque point des conducteurs.

THÉORÈME. — *La quantité d'électricité induite sur un conducteur qui enveloppe de toutes parts le corps inducteur est égale à la quantité d'électricité du corps inducteur.*

Considérons un corps inducteur A enveloppé de toutes parts par un corps conducteur soumis à l'induction de A; soient a la charge de l'inducteur, b la charge de nom contraire induite sur la surface intérieure B du conducteur, c la charge induite sur la surface extérieure C de ce conducteur.

Imaginons une surface fermée à l'intérieur du conducteur BC, qui enveloppe la surface intérieure B. Un point pris sur cette surface est soumis aux actions des électricités a, b et c; les trois forces correspondantes se font mutuellement équilibre; par suite, les composantes de ces forces, estimées suivant la normale à la surface, ont une somme algébrique nulle. Il en est de même pour tous les points de la surface fermée; par suite, la somme algébrique des actions de a, b et c, estimées suivant les normales, est nulle. La partie de cette somme relative à a est $4\pi a$, d'après le premier théorème; la portion de la somme relative à b est $-4\pi b$; la partie de la somme relative à c est nulle; d'après le même théorème, donc

$$a = b.$$

La quantité d'électricité induite b est donc égale à la quantité d'électricité a de l'inducteur, résultat conforme aux expériences de Faraday.