Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 61-64

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__61_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1098

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 480);

PAR M. C. MOREAU.

La différence entre $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ *et* e *est comprise entre* $\frac{e}{2m+1}$ *et* $\frac{e}{2m+2}$, *quel que soit* m.

Il faut démontrer les inégalités

$$(1)\qquad \frac{e}{2m+2} < e - \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \frac{e}{2m+1};$$

en isolant $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, elles reviennent aux suivantes :

$$(2)\qquad e\frac{2m}{2m+1} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < e\frac{2m+1}{2m+2}.$$

Supposons d'abord m négatif et plus grand que 1 en valeur absolue, en changeant m en $-m$, les inégalités (2) deviennent

$$e\frac{2m}{2m-1} < \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} < e\frac{2m-1}{2m-2}$$

ou

$$e\frac{1}{1-\frac{1}{2m}} < \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} < e\frac{1-\frac{1}{2m}}{1-\frac{1}{m}},$$

et, en prenant les logarithmes népériens,

$$1-\log\left(1-\frac{1}{2m}\right) < -m\log\left(1-\frac{1}{m}\right)$$
$$< 1+\log\left(1-\frac{1}{2m}\right) - \log\left(1-\frac{1}{m}\right).$$

Or, m étant plus grand que 1,

$$\log\left(1-\frac{1}{m}\right) \quad \text{et} \quad \log\left(1-\frac{1}{2m}\right)$$

sont développables en séries convergentes, et, en réduisant les termes semblables, les inégalités deviennent

$$1+\frac{1}{2m}+\frac{1}{8m^2}+\ldots+\frac{1}{p2^pm^p}+\ldots<1+\frac{1}{2m}+\frac{1}{3m^2}+\ldots$$
$$+\frac{1}{(p+1)m^p}+\ldots<1+\frac{1}{2m}+\frac{3}{8m^2}+\ldots+\frac{2^p-1}{p2^pm^p}+\ldots.$$

On voit alors que les deux premiers termes sont les mêmes dans les trois membres, et que les autres vont respectivement en augmentant du premier membre au troisième, si l'on a $p2^p>p+1>\frac{p2^p}{2^p-1}$, ce qui, en somme, revient à $p+1<2^p$, inégalité toujours vérifiée à partir de $p=2$.

Il résulte donc de là que les inégalités (2) sont vraies pour toutes les valeurs de m comprises entre -1 et $-\infty$.

Faisons-y $m=-1-m'$, m' sera un nombre positif quelconque dans les inégalités suivantes :

$$e\frac{2m'+2}{2m'+1}<\left(1-\frac{1}{m'+1}\right)^{-(m'+1)}<e\frac{2m'+1}{2m'}.$$

Multiplions-les par $\frac{m'}{m'+1}$, il viendra

$$e\frac{2m'}{2m'+1}<\left(1+\frac{1}{m'}\right)^{m'}<e\frac{2m'+1}{2m'+2}.$$

On retrouve ainsi les inégalités (2), qui sont, par suite, démontrées pour toutes les valeurs positives de m.

Il est facile de voir que ces inégalités sont encore vraies pour les valeurs $m = 0$ et $m = -1$; il s'ensuit donc que la question proposée est démontrée pour toutes les valeurs positives, nulles ou négatives de m, excepté pour celles qui sont comprises entre 0 et -1. Cela tient à ce que, pour ces dernières valeurs, la fonction $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est discontinue, passant brusquement du positif au négatif et à l'imaginaire, et qu'on ne peut pas lui assigner des limites variant d'une manière continue.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1118

(voir 2e série, t. XII, p. 384);

PAR M. H. BROCARD.

Sur une droite AB *comme base, on décrit trois triangles isoscèles* ABC, ABC′, ABC″ *dont les hauteurs soient respectivement égales aux produits obtenus en multipliant la moitié de la base par les nombres un, deux, trois : démontrer que la somme des trois angles au sommet de ces triangles est égale à deux droits.*

(LIONNET.)

Désignons par α, β, γ les compléments des trois angles moitiés. On a $\tang\alpha = 1$, $\tang\beta = 2$, $\tang\gamma = 3$. Le produit de ces trois nombres étant égal à leur somme, les trois angles α, β, γ ont pour total 180 degrés. Il en est donc de même de leurs compléments.

Note. — La même question a été résolue par MM. Pellissier; Gambey; Lez; Ch. C.; A. Morel; Vannetelle; Beaujeux; Viaud; à la Rochelle; Paul Demarteau, à Klagenfurt en Carinthie; Henrique y Diaz, élève ingénieur à l'Université de Liége; S. Levänen, à Helsingfors; G. D.; L. Cauret, professeur au lycée du Mans; E. Gatti, étudiant à l'Université de Turin;

A. Moreau, ingénieur des Arts et Manufactures; Jardin, professeur au lycée de Brest; L. Goulin, élève du lycée du Havre; B. Launoy, maître auxiliaire au lycée de Lille; C. V. et E. W., élèves du lycée Louis-le-Grand.