Nouvelles annales de mathématiques

H. Laurent

Remarques sur la théorie des exponentielles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 5-10

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES EXPONENTIELLES;

Par M. H. LAURENT,

Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.

Il y aurait de grands avantages, il me semble, à présenter la théorie des exponentielles en se plaçant à un point de vue différent de celui où l'on se place habituellement; et en effet la démonstration de la continuité de e^x présente de grandes difficultés : elle n'est pas naturelle et elle est peu élégante.

Le but que l'on se propose en étudiant la fonction exponentielle, c'est de généraliser la notion de l'exposant, et l'on rencontre fréquemment, en analyse, ce genre de généralisation. Une fonction étant simplement définie pour des valeurs entières de la variable, étendre cette définition à des valeurs quelconques est ce que l'on appelle *interpoler* la fonction ; on est ainsi parvenu à interpoler un grand nombre de fonctions parmi lesquelles on remarque surtout l'exponentielle et le produit $1.2.3\ldots n$.

Pour qu'une fonction soit interpolée d'une façon utile (car cette interpolation peut évidemment se faire d'une infinité de manières), il convient que, après l'interpolation, la fonction ne perde pas les propriétés dont elle jouissait pour les valeurs entières de la variable. Ainsi la fonction a^x, lorsqu'elle sera interpolée, devra encore satisfaire à la formule fondamentale

$$a^x a^y = a^{x+y},$$

et l'on est conduit à adopter, pour la définition de $a^{\frac{p}{q}}$, la valeur $\sqrt[q]{a^p}$; mais, quoique cette définition soit très-naturelle, on éprouve, comme l'on sait, assez de difficultés à l'étendre aux valeurs incommensurables de x; enfin, quand il s'agit de démontrer la continuité de a^x, on éprouve des difficultés plus grandes encore.

Il me semble alors naturel de définir a^x une fonction jouissant de la propriété d'être continue et de satisfaire, quels que soient x et y, à l'équation

$$a^x a^y = a^{x+y};$$

c'est à ce point de vue que nous nous placerons.

Si l'on observe que la division algébrique permet de développer en série une fonction rationnelle quelconque, on sera tout naturellement porté à se demander si l'on ne pourrait point poser, quel que soit x,

$$(1) \qquad a^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Le second membre de cette formule supposé convergent est, comme l'on sait par un théorème dû à Abel, une fonction continue de x, si x est inférieur en valeur absolue à une valeur R qui, mise à la place de x, rend la série convergente. Ce théorème, dont on fait un usage continuel, n'est pas un hors-d'œuvre dans le Cours de Mathématiques spéciales, vu qu'on le suppose connu des élèves qui suivent les Cours de l'École Polytechnique ou des Facultés. Ceci posé, on a

$$(2) \qquad a^y = a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n + \ldots;$$

en multipliant les formules (1) et (2) membre à membre, on a, d'après un théorème connu,

$$a^x a^y = a_0^2 + a_0 a_1 (x+y) + \dots$$
$$+ (a_0 a_n x^n + a_1 a_{n-1} x^{n-1} y + \dots + a_n a_0 y^n) + \dots,$$

et il est clair que le second membre de cette formule serait égal à a^{x+y}, si l'on avait

$$a_n (x+y)^n = a_0 a_n x^n + a_1 a_{n-1} x^{n-1} y + \dots + a_n a_0 y^n.$$

Faisant alors $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, on a successivement

$$a_0 = a_0^2, \quad a_1 (x+y) = a_0 a_1 x + a_1 a_0 y,$$
$$a_2 (x+y)^2 = a_0 a_2 x^2 + a_1^2 xy + a_2 a_0 y^2,$$

et, en général,

$$(3) \qquad a_n (x+y)^n = a_0 a_n x^n + a_1 a_{n-1} x^{n-1} y + \dots.$$

La première équation donne, en rejetant la solution $a_0 = 0$, inadmissible en général, $a_0 = 1$, puisque a^0 n'est pas nul et que $a_0 = a^0 = 1$; la seconde équation donne, par l'identification, $a_1 = a_1$; la suivante détermine $a_2 = \frac{a_1^2}{2}$; la suivante donnerait $a_3 = \frac{a_1^3}{2.3}$, et il est naturel d'admettre que l'on a $a_n = \frac{a_1^n}{1.2.3\dots n}$. En effet, cette hypothèse portée dans l'équation (3) donne

$$\frac{a_1^n}{1.2.3\dots n}(x+y)^n = 1 \frac{a_1^n}{1.2.3\dots n} x^n + \frac{1}{1} \frac{a_1^n}{1.2\dots(n-1)} x^{n-1} y$$
$$+ \frac{1}{1.2} \frac{a_1^n}{1.2\dots(n-2)} x^{n-2} y^2 + \dots,$$

c'est-à-dire

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} y^2 + \dots.$$

ce qui est une identité. Ainsi, tous les coefficients de la série sont déterminés sauf a_1, ce qui devait être, car a^x dépend de a et de x; posons donc

$$(4) \qquad a^x = 1 + \frac{a_1 x}{1} + \frac{a_1^2 x^2}{1.2} + \ldots + \frac{a_1^n x^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Le second membre de cette équation est toujours convergent quand x est fini; donc il définit une fonction continue de x. Il est inutile de vérifier que $a^x a^y$ est égal à a^{x+y} : ce serait refaire des calculs déjà effectués.

A chaque valeur de a correspondra une valeur de a_1, et *vice versâ*. Prenons par exemple $a_1 = 1$, nous aurons. en appelant e la valeur correspondante de a,

$$(5) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

et, par suite, en faisant $x = 1$,

$$(6) \qquad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots = 2,718281828459045\ldots$$

Si, dans la formule (4), on fait $x = 1$, on a

$$a = 1 + \frac{a_1}{1} + \frac{a_1^2}{1.2} + \ldots + \frac{a_1^n}{1.2\ldots n} + \ldots = e^{a_1};$$

donc a_1 est un nombre tel que, en élevant e à la puissance a_1, on retrouve a : c'est ce que l'on appelle le *logarithme népérien* de a ou le logarithme de a dans la base e. De la formule (4) on tire

$$\frac{a^x - 1}{x} = a_1 + \frac{a_1^2 x}{1.2} + \ldots,$$

et, pour $x = 0$,

$$\lim \frac{a^x - 1}{x} = a_1 = \log\,\text{nép}\,a.$$

On a ainsi, pour $a = e$,

$$\lim \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

donc, en appelant θ un nombre dont la limite est 1 pour $x = 0$,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \theta, \quad \text{d'où} \quad e = (1 + \theta x)^{\frac{1}{x}},$$

et, par suite,

$$e^{\frac{1}{\theta}} = (1 + \theta x)^{\frac{1}{\theta x}}.$$

Si x tend, d'une manière continue, vers zéro, θ, qui est égal à $1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \ldots$, tend vers 1 d'une manière continue, et la formule précédente donne

$$e = \lim(1 + \theta x)^{\frac{1}{\theta x}};$$

mais, θx tendant vers zéro d'une manière continue, on peut remplaçer θx par $\frac{1}{m}$, et l'on a

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \quad \text{pour} \quad m = \infty.$$

En résumé, la méthode que je propose : 1° est plus courte que la méthode classique; 2° n'exige en réalité aucun principe nouveau, car le théorème d'Abel est implicitement dans le programme; 3° est rigoureuse; 4° a l'avantage immense de démontrer en un trait de plume la formule exponentielle et les deux formules importantes dont l'une est exigée :

$$\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e, \quad \lim \frac{a^x - 1}{x} = \log a;$$

5° permet de définir l'exponentielle imaginaire; 6° est aussi naturelle qu'on peut le désirer.

Remarque. — Il est bon de faire observer que, si l'on a $a^x a^y = a^{x+y}$, on a, par cela même,

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \text{ etc.}$$

Cela viendra nécessairement dans l'étude des propriétés de la fonction exponentielle.