NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. LAISANT

Note sur l'enveloppe d'un système de courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 571-573

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__571_1>

NOTE SUR L'ENVELOPPE D'UN SYSTÈME DE COURBES PLANES;

PAR M. A. LAISANT.

La recherche de l'enveloppe d'un système de courbes planes ne se fait ordinairement que dans les cours d'Analyse infinitésimale. Par un détour bien simple, il me semble cependant qu'elle peut être présentée de manière à trouver place dans l'enseignement des Mathématiques spéciales, et cela de la manière suivante.

Soit $f(x, y, \alpha) = 0$ une équation renfermant un paramètre arbitraire α, et représentant, par suite, un système de courbes. Nous pourrons la considérer comme représentant une surface, en regardant α comme une troisième variable. Chaque équation obtenue pour une valeur particulière de α représente la projection mn, sur le plan XY, d'une section MN de la surface, parallèle à ce plan et se projetant en vraie grandeur.

Le point de l'enveloppe que nous cherchons est la limite de l'intersection p de deux courbes voisines $m_1 n_1$, mn, lorsque la première tend indéfiniment à se rapprocher de la seconde. Or soient MN, M_1N_1 les courbes correspondantes de l'espace, P et P_1 les points, respectivement situés sur ces courbes, ayant p pour projection commune. Lorsque M_1N_1 se rapprochera indéfiniment de MN, la corde P_1P tendra à devenir tangente à la surface, sans cesser d'être parallèle à l'axe des α. Donc, à la limite, le plan tangent au point cherché sera parallèle à cet axe, c'est-à-dire que l'enveloppe sera la trace, sur le plan XY, d'un cylindre circonscrit à la surface et parallèle à l'axe des α.

Comme les cosinus des angles du plan tangent en x, y, α, avec les axes, sont respectivement proportionnels à

$$f'_x(x, y, \alpha), \quad f'_y(x, y, \alpha), \quad f'_\alpha(x, y, \alpha),$$

il en résulte que nous devrons avoir

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

En combinant cette équation avec celle exprimant que le point (x, y, α) est situé sur la surface

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

et en éliminant α entre les deux, nous obtiendrons le contour apparent, c'est-à-dire l'enveloppe cherchée.

On retombe ainsi sur les résultats bien connus de la théorie des enveloppes.

N. B. — Nous avons supposé les axes OX, OY, Oα rectangulaires, en disant que les cosinus des angles du plan tangent avec les axes étaient proportionnels aux dérivées partielles; mais il est bien aisé de voir que la conclusion est la même pour des axes quelconques, puisque l'équation du plan tangent est toujours de la forme

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y + (A - \alpha)f'_\alpha = 0.$$