NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. DOSTOR

# Tétraèdre dont les six arêtes sont tangentes à une même sphère

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 13 (1874), p. 563-568

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__563_1>

# TÉTRAÈDRE DONT LES SIX ARÊTES SONT TANGENTES A UNE MÊME SPHERE;

PAR M. G. DOSTOR,
Docteur ès sciences.

1. Supposons que le tétraèdre SABC soit circonscriptible par les arêtes à une sphère, dont nous désignerons le rayon par $\rho$. Posons $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ et $BC = a'$, $CA = b'$, $AB = c'$, et soient $A'$, $B'$, $C'$, $A''$, $B''$, $C''$ les points de contact de ces arêtes. Nous avons évidemment

$$AA' = AB'' = AC'' = \alpha, \quad BB' = BC'' = BA'' = \beta,$$
$$CC' = CA'' = CB'' = \gamma, \quad SA' = SB' = SC' = \delta,$$

de sorte que

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} a &= AA' + SA' = \alpha + \delta, \\ b &= BB' + SB' = \beta + \delta, \\ c &= CC' + SC' = \gamma + \delta; \\ a' &= BA'' + A''C = \beta + \gamma, \\ b' &= CB'' + B''A = \gamma + \alpha, \\ c' &= AC'' + C''B = \alpha + \beta. \end{aligned} \right.$$

Ajoutons ces égalités membre à membre, nous obtenons les relations

$$a + a' = b + b' = c + c' = \alpha + \beta + \gamma + \delta.$$

Donc, *dans tout tétraèdre circonscriptible par les arêtes, les sommes des arêtes opposées sont égales entre elles.*

2. Désignons par $\theta$, $\theta'$, $\theta''$ les inclinaisons mutuelles des arêtes opposées $a$ et $a'$, $b$ et $b'$, $c$ et $c'$. Nous avons prouvé dans ce journal (*Nouvelles Annales*, 1867, p. 452) que

$$2aa'\cos\theta = b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2, \ldots.$$

Si nous remplaçons les arêtes par les segments tangentiels (I), nous trouvons les expressions

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} \cos\theta &= \frac{(\delta - \alpha)(\beta - \gamma)}{(\delta + \alpha)(\beta + \gamma)}, \\ \cos\theta' &= \frac{(\delta - \beta)(\gamma - \alpha)}{(\delta + \beta)(\gamma + \alpha)}, \\ \cos\theta'' &= \frac{(\delta - \gamma)(\alpha - \beta)}{(\delta + \gamma)(\alpha + \beta)}; \end{aligned} \right.$$

nous en tirons

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{(\delta + \alpha)(\beta + \gamma) - (\delta - \alpha)(\delta - \beta)}{(\delta + \alpha)(\beta + \gamma) + (\delta - \alpha)(\delta - \beta)},$$

ou bien

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\alpha\gamma + \beta\delta}, \\ \operatorname{tang}^2 \frac{\theta'}{2} &= \frac{\beta\gamma + \alpha\delta}{\alpha\beta + \gamma\delta}, \\ \operatorname{tang}^2 \frac{\theta''}{2} &= \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\beta\gamma + \alpha\delta}. \end{aligned} \right.$$

Multiplions ces trois égalités membre à membre, et extrayons la racine carrée du résultat; il nous vient

$$\text{(IV)} \qquad \tang\frac{\theta}{2}\tang\frac{\theta'}{2}\tang\frac{\theta''}{2} = 1.$$

3. Soit O le centre de la sphère tangente aux arêtes du tétraèdre; représentons par $\varphi$ l'inclinaison commune de la droite SO sur les trois arêtes contiguës SA, SB, SC. Si l'on pose l'angle

$$BSC = \lambda, \quad CSA = \mu, \quad ASB = \nu,$$

et que l'on désigne par $x, y, z$ les coordonnées du centre O, on a les relations

$$\begin{aligned}
-\rho + x\cos\varphi + y\cos\varphi + z\cos\varphi &= 0,\\
-\rho\cos\varphi + x + y\cos\nu + z\cos\mu &= 0,\\
-\rho\cos\varphi + x\cos\nu + y + z\cos\lambda &= 0,\\
-\rho\cos\varphi + x\cos\mu + y\cos\lambda + z &= 0,
\end{aligned}$$

qui donnent

$$\begin{vmatrix}
1 & \cos\varphi & \cos\varphi & \cos\varphi\\
\cos\varphi & 1 & \cos\nu & \cos\mu\\
\cos\varphi & \cos\nu & 1 & \cos\lambda\\
\cos\varphi & \cos\mu & \cos\lambda & 1
\end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned}
\cos^2\varphi\,[\sin^2\lambda &+ 2(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)\\
&+ \sin^2\mu + 2(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)\\
&+ \sin^2\nu + 2(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)] = \Delta^2,
\end{aligned}$$

$\Delta^2$ ayant la valeur

$$\Delta^2 = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

Cette égalité peut s'écrire, en intervertissant les membres,

$$\Delta^2 = \cos^2\varphi\,[\Delta^2 + 2(1-\cos\lambda)(1-\cos\mu)(1-\cos\nu)],$$

et donne

$$\text{(V)}\quad \operatorname{tang}^2\varphi = \frac{2(1-\cos\lambda)(1-\cos\mu)(1-\cos\nu)}{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu},$$

ou encore

$$\text{(VI)}\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{2\sin\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}}{\sqrt{\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}}}.$$

*Tel est l'angle $\varphi$ que fait avec trois axes obliques la droite également inclinée sur ces axes.*

4. Le triangle SBC donne

$$a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\lambda,$$

ou

$$(\beta+\gamma)^2 = (\beta+\delta)^2 + (\gamma+\delta)^2 - 2bc\cos\lambda,$$

de sorte qu'on a

$$\text{(VII)}\quad \cos\lambda = 1 - \frac{2\beta\gamma}{bc},\quad \cos\mu = 1 - \frac{2\gamma\alpha}{ca},\quad \cos\nu = 1 - \frac{2\alpha\beta}{ab},$$

et, par suite,

$$\text{(VIII)}\quad \sin^2\frac{\lambda}{2} = \frac{\beta\gamma}{bc},\quad \sin^2\frac{\mu}{2} = \frac{\gamma\alpha}{ca},\quad \sin^2\frac{\nu}{2} = \frac{\alpha\beta}{ab},$$

d'où

$$\text{(IX)}\qquad \sin\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2} = \frac{\alpha\beta\gamma}{abc}.$$

Si nous substituons cette valeur dans l'expression (VI) et que nous remplacions $\operatorname{tang}\varphi$ par son équivalent $\frac{\rho}{\delta}$, nous obtenons

$$(\mathrm{X})\qquad \rho = \frac{4\alpha\beta\gamma\delta}{abc\Delta} = \frac{2\alpha\beta\gamma\delta}{3V},$$

pour *l'expression du rayon de la sphère tangente aux six arêtes du tétraèdre dont le volume est* V.

5. Si la sphère tangente aux arêtes BC, CA, AB touchait extérieurement les arêtes SA, SB, SC aux points $A_1$, $B_1$, $C_1$, on aurait toujours

$$a' = \beta + \gamma, \quad b' = \gamma + \alpha, \quad c' = \alpha + \beta;$$

mais il viendrait

$$a = \delta' - \alpha, \quad b = \delta' - \beta, \quad c = \delta' - \gamma,$$

ou

$$\delta' = SA_1 = SB_1 = SC_1.$$

On trouverait alors que

$$(\mathrm{XI})\qquad \alpha + \beta + \gamma - \delta' = a' - a = b' - b = c' - c,$$

c'est-à-dire que *les différences des arêtes opposées seraient égales entre elles.*

Le rayon de la sphère serait, dans ce cas, $\rho' = \frac{2\alpha\beta\gamma\delta'}{3V}$.

6. Pour le *tétraèdre régulier,* on a $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{a}{2}$ et $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; il vient, par suite,

$$(\mathrm{XII})\qquad \rho = \frac{a}{2\sqrt{2}};$$

et, comme les rayons des sphères, l'une inscrite, l'autre circonscrite, sont

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}, \quad R = \frac{a\sqrt{6}}{4},$$

on voit que

$$\text{(XIII)} \qquad \rho^2 = \frac{a^2}{8} = \mathrm{R}r.$$

Donc, *dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère tangente aux six arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite.*