VACHETTE

Permutations rectilignes de $2q$ lettres égales deux à deux, quand deux lettres consécutives sont toujours distinctes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 549-559

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__549_0>

PERMUTATIONS RECTILIGNES DE $2q$ LETTRES ÉGALES DEUX A DEUX, QUAND DEUX LETTRES CONSÉCUTIVES SONT TOUJOURS DISTINCTES;

Par M. VACHETTE, à Mouy (Oise).

I. — *Préliminaires.*

Le nombre total des permutations de $2q$ lettres, égales deux à deux, est $T_{2q} = \frac{P_{2q}}{(P_2)^q}$.

Soit $B_{q,2}$ le nombre cherché; les permutations rectilignes de cette espèce, désignée par la même notation $B_{q,2}$, seront telles que la dernière et la première lettre y seront distinctes.

Les autres espèces, contenant un ou plusieurs binaires aa, bb,..., ou groupes de deux lettres consécutives pareilles, seront désignées par la notation $M_q(r)$, s'appliquant à la fois à l'espèce et au nombre, r étant le nombre des binaires. $B_{q,2}$ pourrait s'écrire $M_q(0)$; r variant de zéro à q inclusivement, on a les diverses espèces ici considérées.

Le nombre q des lettres distinctes est l'*ordre* de l'espèce. On *abaisse l'ordre* quand le calcul du nombre des permutations d'une espèce désignée d'un certain ordre s'obtient par le calcul d'un ou de plusieurs nombres de permutations d'espèces désignées, mais d'un ordre moindre.

On nomme *tournante* une figure circulaire qui renferme plusieurs permutations rectilignes différentes, mais où l'ordre des lettres consécutives reste le même. Ainsi la même figure circulaire renferme toutes les permutations différentes qu'on obtient avec

$$a\,\underline{bb}\,c\,a\,\underline{dd}\,e\,c\,e,$$

en changeant de lettre initiale. La tournante est *complète*, si elle donne lieu à $2q$ permutations distinctes; les espèces $M_q(r)$, quand r n'est pas nul, n'offrent que des tournantes complètes, car il y a au moins deux lettres consécutives pareilles, ce qui ne permet point aux lettres d'y occuper deux à deux des positions symétriques. Dans l'espèce $B_{q,2}$, il y a des *tournantes incomplètes* : ainsi

$$abcdeabcde,$$

où les lettres occupent deux à deux des positions symétriques, est une tournante incomplète ne contenant que q permutations distinctes.

Le nombre des tournantes complètes de l'espèce $M_q(r)$ est $\frac{1}{2q}\,M_q(r)$.

Le nombre des tournantes de l'espèce $B_{q,2}$ est

$$\frac{B_{q,2}+P_q}{2q};$$

car P_q est le nombre des tournantes incomplètes, à q permutations distinctes, de sorte qu'en ajoutant P_q à $B_{q,2}$ on détruit l'effet des tournantes incomplètes dans la supputation de ce nombre.

L'espèce $M_1(1)$ est une exception; elle ne présente qu'une permutation et qu'une tournante *aa*.

Les *variétés* d'une même espèce d'ordre q dépendent des q systèmes de places occupées par les q systèmes de deux lettres pareilles. En général, une variété comprend P_q tournantes, puisqu'on peut y placer les q lettres distinctes, dans les q systèmes de places, d'un nombre de manières égal à P_q; mais, dans certaines variétés, une permutation peut se diviser en x parties, qui ne changent pas les q systèmes de places, si la permutation commence à l'une quelconque des x parties; ainsi

$$\underline{aa}\,cd\,\underline{bb}\,cd$$

en donne un exemple; les deux parties étant $\underline{aa}\,cd$ et $\underline{bb}\,cd$, le nombre des tournantes d'une pareille variété est $\frac{1}{x}\,P_q$; x est un nombre entier plus petit que q, pour toutes les espèces $M_q(r)$, car chaque partie x doit contenir au moins deux lettres; il est donc diviseur de P_q et $\frac{1}{x}\,P_q$ est entier.

Les variétés à P_q tournantes sont *asymétriques*; les variétés à $\frac{1}{x}\,P_q$ tournantes sont *symétriques de fraction* $\frac{1}{x}$. Si, dans une espèce $M_q(r)$, on trouve n variétés asymétriques et n' variétés symétriques de fraction $\frac{1}{x'}$, n'' de fraction $\frac{1}{x''}, \ldots$, on aura

$$M_q(r) = 2q\,P_q\left(n + \frac{n'}{x'} + \frac{n''}{x''} + \ldots\right).$$

Une formule de vérification sera

$$T_{2q} = B_{q,2} + \sum_1^q M_q(r).$$

II. — *Exemples de calcul direct.*

1° L'espèce $M_q(q)$ n'a qu'une variété symétrique de fraction $\frac{1}{q}$, puisque les q binaires sont consécutifs,

$$\underline{aa}\,\underline{bb}\,\underline{cc}\,\underline{dd}\,\underline{ee};$$

donc

$$\frac{2q\,P_q}{q}\,1 = M_q(q),$$

d'où

$$(q) \qquad M_q(q) = 2P_q.$$

2° Chaque variété de l'espèce $M_q(q-1)$ contient $q-1$ binaires, et deux lettres pareilles isolées f, f; il y a pour ces deux lettres, entre deux binaires consécutifs, $q-1$ places disponibles. Toutes les variétés sont asymétriques, si q est pair; en effet, il y a un nombre impair de binaires, et la permutation ne peut se diviser en parties symétriques, comprenant chacune le même nombre de binaires. Pour une place occupée par l'une des lettres f, la seconde peut en occuper $q-2$, ce qui donne $\frac{q-2}{2}$ systèmes de places, puisque chacun des systèmes est répété deux fois; on a donc $\frac{q-2}{2}$ variétés, et il en résulte

$$M_q(q-1) = \frac{q-2}{2}\,2q\,P_q,$$

d'où

$$(q-1) \qquad M_q(q-1) = q(q-2)P_q.$$

Cette formule convient encore au cas où q est impair. Sur les $q-2$ systèmes de places occupées par les lettres f, $q-3$ répondent à des variétés asymétriques et sont répétés deux fois, ce qui donne, pour le nombre A_1, des permutations correspondant à ces $\frac{q-3}{2}$ variétés,

$$2q\,P_q\,\frac{q-3}{2} = A_1,$$

ou

$$A_1 = q(q-3)P_q.$$

Le dernier système de places répond à une variété symétrique de fraction $\frac{1}{2}$,

$$\underline{aa}f\,\underline{bb}\,\underline{cc}\,\underline{dd}f\,\underline{ee}\,\underline{gg},$$

et l'on a, pour le nombre A_2 correspondant à cette variété,

$$A_2 = 2q\,P_q\,\tfrac{1}{2},$$

d'où

$$A_2 = q\,P_q;$$

alors

$$M_q(q-1) = q(q-3)P_q + q\,P_q = q(q-2)P_q.$$

Remarque. — Pour $q=1$, la formule (q) est en défaut, car

$$M_1(1) = 1.$$

III. — *Abaissement d'ordre de* $B_{q,2}$.

Les permutations de l'espèce $T_{2(q-1)}$ servent à former les T_{2q}, en introduisant un nouveau couple de deux lettres pareilles h dans chacune des $T_{2(q-1)}$. Si l'on suppose les places numérotées depuis 1 jusqu'à $2q$, l'une des lettres h ayant un de ces numéros, l'autre aura un des $2q-1$ numéros restants, ce qui donne $\frac{2q(2q-1)}{2}$ systèmes de places, puisqu'on peut commencer chaque système par l'un ou l'autre de ses deux numéros : ainsi

$$T_{2q} = \frac{2q(2q-1)}{2}T_{2(q-1)} = \frac{2q(2q-1)}{2}\,\frac{P_{2q-2}}{(P_2)^{q-1}} = \frac{P_{2q}}{(P_2)^q}.$$

Ce moyen sert à former les $B_{q,2}$; mais à cette formation ne peuvent concourir que les $B_{q-1,2}$, les $M_{q-1}(1)$ et les $M_{q-1}(2)$, parce que l'introduction des deux h ne peut détruire que deux binaires.

Une $B_{q-1,2}$ offre $2q$ numéros à chacune des lettres h; si l'on en donne un à la première, la seconde, ne pouvant avoir un numéro immédiatement voisin, n'en prendra que $2q-3$, d'où $\frac{2q(2q-3)}{2}$ systèmes de places. La part fournie par les $B_{q-1,2}$ sera

$$q(2q-3)\,B_{q-1,2}.$$

Pour une tournante de l'espèce $M_{q-1}(1)$, on ferme le binaire avec la première h, et l'autre peut occuper $2q-3$ places; on obtient ainsi $2q-3$ tournantes de l'espèce cherchée; comme il y en a $\frac{1}{2(q-1)}\,M_{q-1}(1)$ de l'espèce génératrice, on en a $\frac{2q-3}{2(q-1)}\,M_{q-1}(1)$: pour avoir la part fournie en permutations, on multiplie par $2q$, ce qui donne

$$\frac{q(2q-3)}{q-1}\,M_{q-1}(1).$$

Pour une tournante d'espèce $M_{q-1}(2)$, il n'y a qu'une manière de fermer les binaires; la part en tournantes est $\frac{1}{2(q-1)}\,M_{q-1}(2)$, et en permutations

$$\frac{1}{q-1}\,M_{q-1}(2).$$

On ajoute les trois parts, on multiplie par $\frac{q-1}{q}$, et l'on a la formule

$$\begin{aligned}\frac{q-1}{q}\,B_{q,2} = {} & (q-1)(2q-3)\,B_{q-1,2}\\ & + (2q-3)\,M_{q-1}(1) + M_{q-1}(2).\end{aligned}$$

IV. — *Décomposition des* T_{2q} *pour* $q = 2$ et $q = 3$.

1° On trouve directement

$$B_{2,2} = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} ab\,ab \\ ba\,ba \end{array} \right.$$

$$M_2(1) = 0$$

$$M_2(2) = 4 \qquad \underline{aa}\,\underline{bb} \text{ tournante complète,}$$

$$6 = T_{2\times 2} = \frac{1.2.3.4}{2^2}.$$

Dans $M_2(2)$, il n'y a qu'une seule variété

$$\underline{aa}\,\underline{bb}$$

symétrique de fraction $\frac{1}{2}$; elle donne donc, en permutations, le nombre $2q\,P_q\,\frac{1}{2} = 2.2.2.\frac{1}{2} = 4$, pour $q = 2$.

2° On trouve

$$B_{3,2} = 24 = 4P_3 \quad \text{par la formule } B_{q,2},$$

$$\tfrac{2}{3}B_{3,2} = 2.3B_{2,2} + M_2(2) = 12 + 4 = 16,$$

$$M_3(2) = 18 = 3P_3 \quad \text{par la formule } (q-1),$$

$$M_3(3) = 12 = 2P_3 \quad \text{par la formule } (q).$$

Comme $T_{2\times 3} = \frac{1.2.3.4.5.6}{2^3} = 15P_3$, on doit obtenir $M_3(1) = 6P_3$: il n'y a qu'une variété asymétrique

$$\underline{aa}\,bc\,bc,$$

d'où, en permutations,

$$M_3(1) = 6P_3.1 = 6P_3.$$

V. — *Formule du nombre* $M_q(r)$, *cas de* $r = 1$ *et de* $r = 2$.

1° L'espèce $M_q(r)$ contient $\frac{1}{2q}M_q(r)$ tournantes; si l'on commence chaque permutation par un des r binaires, on évaluera $\frac{r}{2q}M_q(r)$ permutations.

Si l'on enlève ce binaire initial, les lettres qui l'entourent sont ou non les mêmes, et les deux figures

$$\underline{aa}\,b\,\underline{ee}\,d\,\underline{cc}\,db,\quad \underline{aa}\,b\,\underline{ee}\,bd\,\underline{cc}\,d$$

donnent deux figures correspondantes, permutations d'ordre $q-1$,

$$\underline{b}\,\underline{ee}\,d\,\underline{cc}\,d\underline{b},\quad b\,\underline{ee}\,bd\,\underline{cc}\,d,$$

appartenant aux espèces respectives

$$\mathrm{M}_{q-1}(r),\quad \mathrm{M}_{q-1}(r-1).$$

La somme des nombres de permutations ainsi comptées, étant relative à une seule des q lettres distinctes (la lettre a qu'on en a enlevée), devra être multipliée par q. Or, dans l'espèce $\mathrm{M}_{q-1}(r)$, on ne compte que r des $2(q-1)$ permutations d'une tournante, celles qui commencent par la seconde lettre d'un binaire, $\frac{r}{2(q-1)}\mathrm{M}_{q-1}(r)$; dans l'espèce $\mathrm{M}_{q-1}(r-1)$, on n'en compte que $2q-r-1$, les $2(q-r)$ qui commencent par une des $2(q-r)$ lettres isolées, et les $r-1$ qui commencent par l'initiale d'un des $r-1$ binaires, $\frac{2q-r-1}{2(q-1)}\mathrm{M}_{q-1}(r-1)$. On multiplie par q la somme des deux parts, et l'on a la formule, après les réductions,

$$(r)\quad \frac{r(q-1)}{q^2}\mathrm{M}_q(r)=(2q-r-1)\mathrm{M}_{q-1}(r-1)+r\mathrm{M}_{q-1}(r).$$

2° Si l'on y fait $r=1$ et $r=2$, on a les deux formules suivantes, préparées pour le calcul de $\mathrm{B}_{q,2}$:

$$(1)\qquad \frac{q-1}{q^2}\mathrm{M}_q(1)=2(q-1)\mathrm{B}_{q-1,2}+\mathrm{M}_{q-1}(1),$$

$$(2)\quad \frac{2(q-1)}{q^2}\mathrm{M}_q(2)=(2q-3)\mathrm{M}_{q-1}(1)+2\mathrm{M}_{q-1}(2).$$

Pour $q = 3$, on vérifie $M_3(1) = 6P_3$; en effet

$$\frac{2}{q} M_3(1) = 4B_{2,2} = 8, \quad \text{d'où} \quad M_3(1) = 36.$$

VI. — *Problème nouveau résolu à l'aide de la formule* $M_q(r)$.

« Trouver le nombre $B_{2q'+r}$ des permutations rectilignes de $2q'+r$ lettres, dont $2q'$ sont deux à deux pareilles, les r autres étant distinctes entre elles et distinctes des premières, quand deux lettres consécutives ne sont jamais les mêmes. »

Une tournante d'espèce $M_q(r)$,

$$i\,\underline{aa}\,efge\,\underline{hh}\,gi\,\underline{bb}\,f\,\underline{dd}\,\underline{cc},$$

devient une tournante d'espèce $B_{2(q-r)+r} = B_{2q'+r}$ pour $q' = q - r$,

$$i\underline{a}efge\underline{h}gi\underline{b}f\underline{d}\underline{c},$$

si l'on y suppose tout binaire $\underline{aa}$ condensé en une seule lettre a. Or

$$B_{2q'+r} = \frac{2q-r}{2q} M_q(r) = \frac{2q'+r}{2(q'+r)} M_{q'+r}(r);$$

car, sur les $2q$ permutations de l'ancienne tournante, il y en a r, celles où un binaire occupe les places extrêmes, qui ne donnent rien de plus, pour les permutations bonnes de la nouvelle espèce, que les r permutations où ce même binaire est en tête.

Ces $B_{2q'+r}$ sont des tournantes complètes; il ne peut exister entre les lettres la symétrie qui rend tournantes incomplètes certaines permutations de l'espèce $B_{q,2}$.

VII. — *Applications numériques.*

En appliquant les formules, on trouve :

1° Décomposition des $T_{2\times 4} = \dfrac{1.2.3.4.5.6.7.8}{2^4} = 105 P_4$:

$$\begin{aligned} B_{4,2} &= 31 P_4 \\ M_4(1) &= 40 P_4 \\ M_4(2) &= 24 P_4 \\ M_4(3) &= 8 P_4 \\ M_4(4) &= 2 P_4 \\ \hline & \quad 105 P^4 \end{aligned}$$

2° Décomposition des $T_{2\times 5} = P_5 \dfrac{6.7.8.9.10}{2^5} = 945 P_5$:

$$\begin{aligned} B_{5,2} &= 293 P_5 \\ M_5(1) &= 360 P_5 \\ M_5(2) &= 205 P_5 \\ M_5(3) &= 70 P_5 \\ M_5(4) &= 15 P_5 \\ M_5(5) &= 2 P_5 \\ \hline & \quad 945 P_5 \end{aligned}$$

3° Décomposition des

$$T_{2\times 6} = T_{2\times 5} \frac{11.12}{2} = 945 P_5 . 11 . 6 = 10395 P_6 \cdot$$

$$\begin{aligned} B_{6,2} &= 3326 P_6 \\ M_6(1) &= 3948 P_6 \\ M_6(2) &= 2190 P_6 \\ M_6(3) &= 740 P_6 \\ M_6(4) &= 165 P_6 \\ M_6(5) &= 24 P_6 \\ M_6(6) &= 2 P_6 \\ \hline & \quad 10395 P_6 \end{aligned}$$

4° Décomposition des

$$T_{2\times7} = T_{2\times6}\,\frac{13.14}{2} = 10395\,P_6 . 13.7 = 135135\,P_7 :$$

$$\begin{array}{rr}
B_{7,2} = & 44189\,P_7 \\
M_7(1) = & 51170\,P_7 \\
M_7(2) = & 27888\,P_7 \\
M_7(3) = & 9380\,P_7 \\
M_7(4) = & 2135\,P_7 \\
M_7(5) = & 336\,P_7 \\
M_7(6) = & 35\,P_7 \\
M_7(7) = & 2\,P_7 \\
\hline
 & 135135\,P_7
\end{array}$$