NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 533-541

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__533_0>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. E. Lemoine. — Dans le numéro de juillet dernier, M. Doucet revient sur cette question déjà résolue : *Trouver l'enveloppe de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur.* Il en donne une solution très-élégante et je ne fais d'observations à son sujet que parce que, de même que dans les solutions déjà données, la nature connue et étudiée de la courbe enveloppe n'est pas mise en évidence.

On sait que la corde dont on cherche l'enveloppe est la symétrique de la tangente par rapport à l'ordonnée du point de contact M ; or il est évident que, si l'on considère le cercle ayant pour diamètre le grand axe de l'ellipse et dont la projection sur le plan de l'ellipse est cette ellipse, l'enveloppe de la droite symétrique de la tangente à ce cercle, par rapport à l'ordonnée du point de contact dans ce cercle, aura pour projection l'enveloppe cherchée.

Occupons-nous de trouver cette enveloppe dans le cercle. Soient OA, OB′ (*) deux diamètres rectangulaires de ce cercle. Soit M′ un point du cercle, la tangente au cercle en M′ coupe OA en S, la symétrique de M′S par rapport à l'ordonnée M′μ coupe OA en J. Menons OK bissectrice de l'angle B′OA et OH perpendiculaire à OK. Soient K et H les points où M′J coupe OK et OH. Appelons α l'angle M′OA, on a

$$\mathrm{M'OH} = \mathrm{M'OA} + \mathrm{AOH} = \alpha + 45^\circ,$$

on a aussi

$$\begin{aligned}\mathrm{OHJ} &= 180^\circ - \mathrm{HOJ} - \mathrm{OJH} \\ &= 180^\circ - 45^\circ - \mathrm{M'JS} = 180^\circ - 45^\circ - \mathrm{M'SO},\end{aligned}$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

car, puisque M'J est symétrique de M'S, on a

$$M'JS = M'SO;$$

mais $M'SO = 90^\circ - \alpha$ il : vient donc

$$OHJ = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ + \alpha = 45^\circ + \alpha.$$

Donc OHJ = M'OH, le triangle OM'H est isoscèle; par suite, dans le triangle *rectangle* KOH, M' est le centre du cercle circonscrit et l'on a KH = 2M'O. Les extrémités de la droite KH de longueur constante glissent donc sur les deux droites fixes rectangulaires OK, OH, et par suite la droite KH enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements, etc.

Extrait d'une Lettre de M. Haton de la Goupillière. — La livraison de septembre contient, à la page 447, le théorème suivant :

L'enveloppe d'une droite de longueur constante, qui s'appuie par ses extrémités sur deux lignes rectangulaires, a une développée semblable à elle-même.

Cette propriété est remarquable, mais elle n'est pas nouvelle. Elle résulte de ce que la figure en question n'est autre que l'épicycloïde engendrée par un cercle qui roule dans un autre d'un diamètre quadruple (DUHAMEL, *Cours d'Analyse*, IIe Partie, p. 50, 1847) ou plus grand dans le rapport de 4 : 3, d'après le double mode de génération de ces lignes (*ibid.*, 2e édition, t. I, p. 188). Elle participe dès lors aux propriétés si nombreuses et si intéressantes de ces courbes, notamment à celle d'avoir une développée semblable à elle-même. C'est d'ailleurs ce qui résulte directement, pour cette courbe en particulier, de la recherche de sa développée faite par Salmon

(*Treatise on the higher plane curves*, p. 106), en partant de son élégante équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

Indépendamment des propriétés communes à toutes les épicycloïdes, cette ligne, que M. Montucci a nommée *cubo-cycloïde* et employée à la résolution des équations numériques (*Comptes rendus*, t. LX, p. 440 et 846; t. LXIX, p. 526), en possède qui lui sont particulières et parmi lesquelles on pourrait citer les suivantes dans le but de vulgariser la connaissance de cette courbe remarquable :

Enveloppe des ellipses co-axales dont la somme des axes est constante (Desgranges, *Nouvelles Annales*, 1re série, t. XX, p. 351);

Lieu du sommet d'une parabole qui glisse entre deux droites rectangulaires en se déformant de telle manière que le foyer décrive un cercle autour de leur point de rencontre (Rispal, *ibid.*, t. IV, p. 331);

Lieu du point qui a pour coordonnées rectangulaires les *rayons de courbure* des extrémités des diamètres conjugués de l'ellipse (Brassine, *ibid.*, 2e série, t. II, p. 12); ou encore les *courbures* des extrémités d'une corde focale quelconque dans la parabole (Pigeon, *ibid.*, t. III, p. 60);

Enveloppe des cordes communes à une ellipse et à ses cercles osculateurs, lorsqu'on a incliné les ordonnées de la cubo-cycloïde sous l'angle des diamètres conjugués égaux (Lemoine, *ibid.*, t. XIII, p. 334);

Courbe telle que le cube de son arc soit proportionnel au carré de l'ordonnée de l'extrémité de cet arc (Haton de la Goupillière, *Journal de l'École Polytechnique*, XLIIIe Cahier, p. 141);

Courbe telle que l'ordonnée du centre de gravité de son arc soit égale aux deux cinquièmes de l'ordonnée extrême (*ibid.*, p. 142);

Courbe telle que si une barre pesante, homogène ou non, s'y appuie tangentiellement en butant par son extrémité contre une droite verticale, elle reste en équilibre indifférent dans toutes ses situations (WILLIAM WALTON, *Problèmes de Mécanique rationnelle*, du P. Jullien, t. I, p. 151);

Courbe tautochrone pour une force perpendiculaire à une droite et proportionnelle à la racine cubique de la distance à cette droite (*) (*ibid.*, p. 338);

On peut citer encore deux articles de M. Breton de Champ, dont le premier concerne les polygones semi-réguliers circonscrits à cette ligne (*Nouvelles Annales*, 1re série, t. IV, p. 135), et le second appelle l'attention sur certains rapports qui existent entre elle et la développée de l'ellipse (*ibid.*, t. II, p. 223);

La courbe plus générale dont la cubo-cycloïde forme un cas particulier, et qui est l'enveloppe d'une droite de longueur constante s'appuyant par ses extrémités sur deux droites *quelconques*, a été envisagée par M. Merlieux (*ibid.*, t. I, p. 265), qui a ébauché la recherche de

---

(*) Il est remarquable que la cubo-cycloïde présente ainsi un double tautochronisme. On sait, en effet, qu'indépendamment du précédent qui lui est propre, toute épicycloïde est isochrone pour les forces centrales proportionnelles à la distance (NEWTON, *Livre des Principes*, Proposition LI). J'ai même montré que cet isochronisme n'est altéré ni par le frottement ni par une résistance proportionnelle à la vitesse, et, en outre, que la réunion de toutes les influences précédentes constitue le cas le plus général qui soit renfermé dans la formule de Lagrange pour le tautochronisme, lorsqu'à l'action centrale, en raison de la distance et à l'influence du frottement, on joint une résistance d'après une fonction *indéterminée* de la vitesse (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t, XIII, p. 204).

son équation, effectuée plus tard par M. Joachimsthal (*ibid.*, t. VI, p. 260). M. Bouteiller a, d'un autre côté, étudié sa polaire réciproque (*ibid.*, t. VI, p. 263).

Extrait d'une lettre de M. B. Niewenglowski. — Dans son *Algèbre*, M. H. Laurent donne un moyen très-élégant pour calculer la somme des puissances négatives des racines de l'équation $f(x) = 0$. La méthode indiquée pour les puissances positives me semble moins simple; or il n'y a qu'à copier textuellement le premier cas.

Si α désigne une racine quelconque, on a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{1}{x-\alpha} = \frac{n}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \ldots + \frac{S_k}{x^{k+1}} + \ldots;$$

donc si l'on fait la division de $f'(x)$ par $f(x)$, ordonnée par rapport aux puissances croissantes de $\frac{1}{x}$, S_k sera le coefficient de $\frac{1}{x^{k+1}}$.

Avant de terminer, je vous prie de m'accorder encore quelques lignes. Dans l'intéressant exposé de la méthode des équipollences que vous venez de publier, se trouve la démonstration d'un théorème sur le quadrilatère inscriptible. Or celui-là est bien facile, et sa réciproque se trouve démontrée dans tous les Traités.

Il n'en est pas de même du théorème relatif au rapport des deux diagonales. La réciproque de ce dernier ne se trouve, à ma connaissance, que dans la *Géométrie* de M. Compagnon. Or la méthode des équipollences donne facilement le théorème et sa *réciproque* : il suffit de partir de l'identité algébrique

$$(x+y)[xy+z(x+y+z)] = (y+z)[yz+x(x+y+z)],$$

qui donne pour quatre points A, B, C, D, formant un quadrilatère convexe, l'équipollence

$$AC(AB \times BC + DA \times DC) \triangleq BD(AB.AD + BC.CD),$$

que l'on peut écrire

$$AB \times BC + DA \times DC \triangleq \frac{BD}{AC}(AB.AD + BC.CD).$$

Si

$$\text{incl.}\,(AB.BC) = \text{incl.}\,(DA.DC),$$

on aura

$$\text{gr.}(AB.BC + DA.DC) = \text{gr.}\,\frac{BD}{AC}(AB.AD + BC.CD),$$

et réciproquement. Or l'égalité relative aux inclinaisons peut s'écrire

$$\text{incl. } AB - \text{incl. } DA = \text{incl. } DC - \text{incl. } BC,$$

ou

$$180^\circ - \text{angle } DAB = \text{angle } BCD.$$

On trouverait de même la relation analogue relative au quadrilatère croisé.

Extrait d'une lettre de M. Bourguet. — Dans votre numéro d'octobre 1873, page 451, vous donnez la solution de la question 1006. D'après M. Moret-Blanc, l'énoncé de cette question est inexact : c'est une erreur, l'énoncé est parfaitement exact. Au reste, voici une solution très-simple.

Si l'on faisait rouler un polygone sur la droite AB, on aurait, pour l'accroissement de l'aire correspondant à une rotation autour d'un sommet M,

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}\,OM^2\alpha + t,$$

t étant le triangle OMN. Par conséquent, à la limite, c'est-à-dire lorsque le polygone se change en courbe, on a

$$(1) \qquad dA = \tfrac{1}{2}\rho^2 d\alpha + \tfrac{1}{2}\rho^2 d\beta,$$

ρ étant la distance du point de contact au point générateur, $d\alpha$ l'angle de contingence et $d\beta$ la rotation de ρ.

Cherchons ces trois éléments. On a d'abord

$$(2) \qquad \rho^2 = a^2 + b^2 - rr';$$

puis, en appelant γ l'angle que fait la normale avec les rayons focaux r, r',

$$\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{rr'}}, \quad \sin\alpha = \frac{c}{a}\sin\gamma = \frac{c}{a}\sqrt{1 - \frac{b^2}{rr'}},$$

d'où

$$(3) \qquad d\alpha = -\frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{rr'}}{\sqrt{\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{rr'}\right)\left(\frac{1}{rr'} - \frac{1}{a^2}\right)}}.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2} = \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 - rr'};$$

d'où

$$\frac{c}{a}\cos\beta = \frac{\sqrt{a^2 - rr'}}{\rho}, \quad \frac{c}{b}\sin\beta = \frac{\sqrt{rr' - b^2}}{\rho},$$

$$\frac{c^2}{a^2 b^2}\rho^4 d\beta \sin\beta\cos\beta = -\frac{1}{2}drr';$$

d'où

$$(4) \qquad \rho^2 d\beta = \frac{1}{2}\frac{ab\,drr'}{\sqrt{(a^2 - rr')(rr' - b^2)}}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (1), on a

$$dA = -\frac{1}{4}\frac{(a^2 + b^2 - rr')d\frac{1}{rr'}}{\sqrt{\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{rr'}\right)\left(\frac{1}{rr'} - \frac{1}{a^2}\right)}} + \frac{1}{4}\frac{ab\,drr'}{\sqrt{(a^2 - rr')(rr' - b^2)}};$$

d'où

$$(5)\qquad dA = -\frac{1}{4}\frac{(a^2+b^2)d\,\frac{1}{rr'}}{\sqrt{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{rr'}\right)\left(\frac{1}{rr'}-\frac{1}{a^2}\right)}},$$

d'où

$$(6)\qquad A = \frac{1}{4}(a^2+b^2)\arccos\frac{\frac{2a^2b^2}{rr'}-(a^2+b^2)}{c^2}.$$

La valeur de A correspondant à une demi-révolution sera

$$(7)\qquad A = \tfrac{1}{2}\pi(a^2+b^2).\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

L'équation (6) conviendra à l'hyperbole en y changeant r' en $-r'$, b^2 en $-b^2$; mais alors A représente la différence entre l'aire limitée par la courbe, deux normales et sa développée, et l'aire limitée par cette développée, les deux normales et la droite AB. La formule (6) devient alors

$$(8)\qquad A = \frac{1}{4}(a^2-b^2)\arccos\frac{\frac{2a^2b^2}{rr'}-(a^2-b^2)}{c^2},$$

et, en intégrant entre les limites $rr' = b^2$ et $rr' = \infty$, on a

$$(9)\qquad A = \frac{1}{4}(a^2-b^2)\arccos\frac{b^2-a^2}{c^2}.$$

Dans le cas de l'hyperbole équilatère, on a $dA = 0$; cela prouve que le point correspondant de la développée est le milieu de ρ, propriété vraiment remarquable de la courbe.

La courbe décrite par le centre est un ovale, tandis que sa développée se compose de deux accolades asymptotiques à la droite AB. La différence entre les aires de ces deux courbes est donc

$$(10)\qquad A = (a^2-b^2)\arccos\frac{b^2-a^2}{c^2};$$

ces deux aires sont égales, dans le cas de l'hyperbole équilatère.

La recherche de A n'est pas plus difficile lorsque le point générateur est un point quelconque de l'axe focal. Soient d la distance de ce point au centre, ρ' la distance de ce point à un point quelconque de la courbe, on a

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho'^2 = (x-d)^2 + y^2 = \rho^2 + d^2 - 2\frac{d}{e}(a-r),\\ &\rho'^2 = \rho^2 + d^2 - 2\frac{d}{e}\sqrt{a^2 - rr'}. \end{aligned}\right.$$

Appelons S le secteur elliptique correspondant, on aura

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} dA = &-\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + d^2 - rr')\,d\frac{1}{rr'}\\ &-\frac{1}{2}\frac{dab}{e}\frac{drr'}{rr'\sqrt{rr' - b^2}} + dS, \end{aligned}\right.$$

et

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} A = &\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + d^2)\arccos\frac{\dfrac{2a^2b^2}{rr'} - (a^2 + b^2)}{c^2}\\ &-\frac{1}{4}ab\arccos\frac{2rr' - (a^2 + b^2)}{c^2}\\ &-\frac{1}{2}\frac{da}{e}\gamma + S, \end{aligned}\right.$$

et pour l'aire correspondant à une demi-révolution

$$(14)\qquad A = \tfrac{1}{2}\pi(a^2 + b^2 + d^2).$$

Si le point est l'un des foyers,

$$A = \pi a^2;$$

s'il est un sommet,

$$A = \tfrac{1}{2}\pi(2a^2 + b^2).$$