Nouvelles annales de mathématiques

G. Dostor

Note relative au rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, en valeur des arêtes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 523-527

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__523_1>

NOTE RELATIVE AU RAYON DE LA SPHÈRE CIRCONSCRITE AU TÉTRAÈDRE, EN VALEUR DES ARÊTES

(voir 2e série, t. XII, p. 370);

PAR M. G. DOSTOR,
Docteur ès sciences.

1. L'expression, sous forme de déterminant, du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, en fonction des six

arêtes de ce tétraèdre, peut s'obtenir immédiatement au moyen de l'équation (I) de la page 371. En effet, cette équation

$$\begin{vmatrix} 4R^2 & a & b & c \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0$$

donne d'abord

$$4R^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous multiplions par les quantités respectives a, b, c d'abord les trois dernières colonnes, puis les trois dernières lignes du second membre, et que nous remarquions que le facteur de $4R^2$, multiplié par $a^2b^2c^2$ ou $a^2b^2c^2\Delta^2$, est égal à $36V^2$, nous voyons que

$$144V^2R^2 = - \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & a^2 & ab\cos\nu & ca\cos\mu \\ b^2 & ab\cos\nu & b^2 & bc\cos\lambda \\ c^2 & ca\cos\mu & bc\cos\lambda & c^2 \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant, retranchons la première colonne de chacune des trois suivantes, multiplions ensuite les trois dernières lignes par -2 et divisons la première colonne résultante par -2, il nous vient

$$576V^2R^2 = - \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & 2a^2 - 2ab\cos\nu & 2a^2 - 2ca\cos\mu \\ b^2 & 2b^2 - 2ab\cos\nu & 0 & 2b^2 - 2bc\cos\lambda \\ c^2 & 2c^2 - 2ca\cos\mu & 2c^2 - 2bc\cos\lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons actuellement la première ligne à chacune des trois suivantes, et retranchons de même la première colonne des trois suivantes, nous trouvons que

$$576\,V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & a^2+b^2-2ab\cos\nu & c^2+a^2-2ca\cos\mu \\ b^2 & a^2+b^2-2ab\cos\nu & 0 & b^2+c^2-2ab\cos\lambda \\ c^2 & c^2+a^2-2ca\cos\mu & b^2+c^2-2bc\cos\lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant, il nous suffira de remplacer les éléments $b^2+c^2-2bc\cos\lambda$, $c^2+a^2-2ca\cos\mu$, $a^2+b^2-2ab\cos\nu$ par les carrés des arêtes latérales a', b', c', pour avoir l'équation demandée

$$\text{(I)} \qquad 576\,V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a^2 \\ c^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. *Autre forme de ce déterminant.* — Multiplions les trois dernières colonnes par les quantités respectives b^2c^2, c^2a^2, a^2b^2, le déterminant sera multiplié par le produit $b^2c^2.c^2a^2.a^2b^2 = a^4b^4c^4$, et nous obtiendrons

$$576\,a^4b^4c^4V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2b^2c^2 & a^2b^2c^2 & a^2b^2c^2 \\ a^2 & 0 & a^2c^2c'^2 & a^2b^2b'^2 \\ b^2 & b^2c^2c'^2 & 0 & b^2a^2a'^2 \\ c^2 & c^2b^2b'^2 & c^2a^2a'^2 & 0 \end{vmatrix};$$

divisons ensuite les quatre lignes respectivement par $a^2b^2c^2$, a^2, b^2, c^2; le déterminant sera divisé par le produit $a^4b^4c^4$, et il nous viendra aussi

$$\text{(II)} \qquad 576\,V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2c'^2 & b^2b'^2 \\ 1 & c^2c'^2 & 0 & a^2a'^2 \\ 1 & b^2b'^2 & a^2a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. *Troisième forme du déterminant* (I). — Dans ce dernier déterminant, multiplions les quatre lignes par les quantités respectives $aa'bb'cc'$, aa', bb', cc'; le déterminant se trouve multiplié par le produit $a^2a'^2b^2b'^2c^2c'^2$, de sorte que nous avons

$$576\,a^2a'^2b^2b'^2c^2c'^2\,\mathrm{V}^2\mathrm{R}^2 = -\begin{vmatrix} 0 & aa'bb'cc' & aa'bb'cc' & aa'bb'cc' \\ aa' & 0 & aa'c^2c'^2 & aa'b^2b'^2 \\ bb' & bb'c^2c'^2 & 0 & bb'a^2a'^2 \\ cc' & cc'b^2b'^2 & cc'a^2a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Divisons ensuite les trois dernières colonnes respectivement par $bb'cc'$, $cc'aa'$, $aa'bb'$; le déterminant se trouve divisé par le produit $a^2a'^2b^2b'^2c^2c'^2$, et nous trouvons encore que

$$\text{(III)} \qquad 576\,\mathrm{V}^2\mathrm{A}^2 = -\begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ aa' & 0 & cc' & bb' \\ bb' & cc' & 0 & aa' \\ cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}.$$

4. *Transformation du déterminant en produit.* — Dans ce dernier déterminant, remplaçons la première colonne par la somme des quatre colonnes; le déterminant ne change pas de valeur, et il vient, en divisant la première colonne résultante par $aa' + bb' + cc'$,

$$576\,\mathrm{V}^2\mathrm{R}^2 = -\begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ aa'+bb'+cc' & 0 & cc' & bb' \\ aa'+bb'+cc' & cc' & 0 & aa' \\ aa'+bb'+cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(aa'+bb'+cc')\begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ 1 & 0 & cc' & bb' \\ 1 & cc' & 0 & aa' \\ 1 & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}.$$

Donc le déterminant (III) est divisible par

$$aa' + bb' + cc'.$$

Dans le même déterminant, de la somme des deux premières colonnes retranchons la somme des deux dernières ; nous obtenons

$$576V^2R^2 = -\begin{vmatrix} aa' - bb' - cc' & aa' & bb' & cc' \\ aa' - bb' - cc' & 0 & cc' & bb' \\ bb' + cc' - aa' & cc' & 0 & aa' \\ bb' + cc' - aa' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (bb' + cc' - aa')\begin{vmatrix} 1 & aa' & bb' & cc' \\ 1 & 0 & cc' & bb' \\ -1 & cc' & 0 & aa' \\ -1 & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix};$$

par suite, le déterminant est aussi divisible par

$$bb' + cc' - aa'.$$

On verrait de même qu'il est encore divisible par

$$cc' + aa' - bb',$$

et par

$$aa' + bb' - cc'.$$

On peut donc écrire

$$576\,V^2R^2 = (aa' + bb' + cc')\,(bb' + cc' - aa')$$
$$\times\,(cc' + aa' - bb')\,(aa' + bb' - cc') \times q.$$

Or, dans le déterminant (III), le produit des éléments situés sur la diagonale de droite à gauche est $-c^4c'^4$; il est aussi $-c^4c'^4$ dans le produit des facteurs qui précèdent q ; donc on a $q = 1$, de sorte que

$$\text{(IV)}\quad \left\{ \begin{aligned} 576V^2R^2 = {} & (aa' + bb' + cc')\,(bb' + cc' - aa') \\ & \times (cc' + aa' - bb')\,(aa' + bb' - cc'). \end{aligned} \right.$$