J. Moutier

Sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 51-57

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__51_1>

SUR LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ A LA SURFACE DES CORPS CONDUCTEURS;

PAR M. J. MOUTIER.

Cet article a pour but d'indiquer quelques démonstrations nouvelles de théorèmes généraux relatifs à la distribution de l'électricité sur les corps conducteurs.

THÉORÈME DE M. CHASLES (*). — 1° *Quand un corps est enveloppé de toutes parts par une surface fermée, la somme des répulsions du corps sur les éléments superficiels de cette surface, estimées suivant les normales à ces éléments, est égale à la masse du corps multipliée par* 4π;

2° *Quand un corps est extérieur à une surface fermée, la somme des répulsions du corps sur les éléments superficiels de cette surface, estimées suivant les normales à ces éléments, est égale à zéro.*

Considérons en premier lieu un point A situé à l'inté-

(*) *Additions à la Connaissance des Temps*, p. 24; 1845.

rieur d'une surface fermée S. Prenons au point B de la surface un élément ω et supposons cet élément repoussé par une force dirigée suivant AB, proportionnelle à la masse m du point A, à l'aire de l'élément ω, et inversement proportionnelle à la distance $AB = r$, de sorte que la force puisse se représenter par $m\frac{\omega}{r^2}$.

Menons au point B la portion de la normale à la surface BN située en dehors de la surface fermée; désignons par φ l'angle de BN avec le prolongement de AB; $m\frac{\omega}{r^2}\cos\varphi$ est la composante de la répulsion dirigée suivant la normale, ou *la répulsion estimée suivant la normale*.

Mais $\frac{\omega\cos\varphi}{r^2}$ est l'élément sphérique intercepté par le cône, dont le sommet est A et la base ω, sur la sphère décrite du point A comme centre avec un rayon égal à l'unité. Pour la surface S tout entière, $\sum\frac{\omega\cos\varphi}{r^2} = 4\pi$; par suite,

$$\sum\frac{\omega}{r^2}\cos\varphi = 4\pi m.$$

Supposons en second lieu le point A extérieur à la surface S. Le cône, qui a pour sommet A et pour base ω, coupe une seconde fois la surface S en un point B'; il intercepte sur la surface un second élément ω', à une distance r' du point A. Si l'on appelle, comme précédemment, φ' l'angle que fait, avec le prolongement de AB', la normale menée au point B' en dehors de la surface, on voit, d'après le raisonnement qui précède, que

$$\frac{\omega\cos\varphi}{r^2} = -\frac{\omega'\cos\varphi'}{r'^2},$$

de sorte que les répulsions estimées suivant la normale ont une somme algébrique nulle, et, par suite, pour la surface fermée tout entière,

$$\sum m \frac{\omega}{r^2} \cos\varphi = 0.$$

Cette propriété se généralise d'une façon évidente. Si l'on appelle en général M une masse agissante, et R la répulsion, estimée suivant la normale, qu'exerce un élément m de la masse M sur un élément superficiel de la surface fermée, la somme des forces ΣR, étendue à la masse M et à la surface fermée, est égale à $4\pi M$ ou à zéro, suivant que la masse M est intérieure ou extérieure à la surface fermée.

Les mêmes théorèmes s'appliquent aussi bien aux attractions qu'aux répulsions, à l'attraction universelle qu'à l'électricité distribuée sur les corps conducteurs; la loi de Coulomb, qui régit dans ce cas les forces électriques, a la même forme que la loi de la gravitation universelle.

L'électricité se porte à la surface des corps conducteurs. — Considérons un corps conducteur électrisé, et supposons qu'il existe de l'électricité à l'intérieur du corps. Imaginons une surface fermée S à l'intérieur du conducteur; désignons par M la masse électrique située à l'intérieur de la surface S, par M′ la masse électrique extérieure à cette surface.

En chaque point de la surface S s'exercent des forces répulsives provenant de M et de M′; ces forces se font équilibre; par suite, la somme de leurs projections estimées suivant la normale à la surface est nulle. Désignons par R la résultante des forces répulsives de M estimées suivant la normale; par R′ la résultante des forces répul sives de M′ estimées de la même manière, $R + R' = 0$; par suite, la somme des quantités analogues doit être nulle pour la surface entière,

$$\Sigma R + \Sigma R' = 0.$$

D'après le théorème précédent,

$$\Sigma R = 4\pi M, \quad \Sigma R' = 0;$$

on a donc

$$M = 0.$$

Ainsi il ne peut y avoir d'électricité à l'intérieur d'une surface fermée S tracée à l'intérieur du conducteur; toute l'électricité doit donc se trouver à la surface du conducteur.

Théorie de Poisson. — L'électricité forme donc une couche mince à la surface du conducteur; la condition d'équilibre de cette couche est déterminée de la manière suivante dans la théorie de Poisson.

Si l'on considère une molécule quelconque de fluide neutre à l'intérieur du conducteur, les deux électricités de cette molécule sont sollicitées par des forces égales et contraires provenant des différents points de la couche; par conséquent, il faut, pour l'équilibre, que *la résultante des actions exercées par la couche électrique sur un point quelconque pris à l'intérieur du conducteur soit nulle;* de cette façon, les électricités positive et négative, qui constituent chaque molécule de fluide neutre à l'intérieur du corps, seront en équilibre, et aucune décomposition électrique nouvelle ne pourra se produire à l'intérieur du conducteur.

Théorème de Laplace. — *L'action d'une couche électrique sur un point quelconque de la couche est normale à la surface du conducteur et proportionnelle à l'épaisseur de la couche électrique en ce point.*

On ne connaît pas la démonstration même de Laplace;

elle avait été communiquée par Laplace à Poisson, qui s'exprime ainsi à ce sujet : « On trouvera, dans la suite de ce Mémoire, une démonstration purement synthétique que M. Laplace a bien voulu me communiquer, et qui prouve que, à la surface de tous les corps électrisés, la force répulsive du fluide est partout proportionnelle à son épaisseur (*). » Plus loin, Poisson rapporte la démonstration et termine ainsi : « Cette démonstration est celle que nous avons annoncée au commencement de ce Mémoire, et qui nous a été communiquée par M. Laplace. Nous l'avons rendue un peu plus générale, en considérant d'abord une couche fluide ou solide qui n'était pas assujettie à n'exercer aucune action sur les points de sa surface intérieure (**). » Une autre démonstration du théorème de Laplace a été donnée depuis par Plana (***). On peut démontrer ce théorème par des considérations simples.

Menons en un point M du conducteur une normale à la surface, qui coupe la couche électrique au point M′, à une distance $MM' = e$, infiniment petite d'ailleurs. Imaginons au point M′ un plan perpendiculaire à MM′; ce plan découpe sur la couche un petit segment ayant pour flèche MM′ : nous désignerons, pour abréger, ce segment par s, et le reste du volume de la couche par S.

Le segment s exerce aux points M et M′ des forces répulsives f et f', que nous allons d'abord évaluer.

Pour déterminer f, imaginons un cône infiniment délié ayant son sommet au point M; désignons par ω l'élément

(*) *Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut*, p. 5; année 1811.

(**) *Loc. cit.*, p. 34.

(***) *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices*, p. 23.

sphérique intercepté par ce cône sur la sphère décrite du point M comme centre avec l'unité pour rayon. Une génératrice du cône rencontre le plan perpendiculaire à MM' en un point A ; désignons par α l'angle de cette génératrice avec MM'.

Si l'on décrit du point M comme centre deux sphères ayant pour rayons r et $r+dr$, l'élément intercepté entre ces deux sphères et la surface conique a pour volume $r^2\omega dr$, et son action répulsive sur le point M est ωdr, de sorte que l'action du cône MA sur le point M est, en posant $AM=\rho$,

$$\int_0^\rho \omega dr = \omega\rho.$$

Mais cette force se décompose en deux autres : l'une. $\omega\rho\sin\alpha$, tangentielle ; l'autre, $\omega\rho\cos\alpha$, normale à la surface. Dans le triangle MAM', $\rho=\frac{e}{\cos\alpha}$; les composantes tangentielle et normale ont pour valeurs respectives $\omega e\tang\alpha$ et ωe. A chaque composante tangentielle correspond une autre force égale et directement opposée, de sorte que la force répulsive au point M est normale à la surface, et a pour valeur, en étendant la somme au segment s,

$$f=\Sigma\omega e = 2\pi e.$$

Pour évaluer f', imaginons de même un cône infiniment délié ayant son sommet au point M ; désignons par ω l'ouverture sphérique du cône, par ρ la longueur d'une génératrice M'A' interceptée dans le segment s, par α l'angle de cette génératrice avec MM'.

L'action exercée par le cône sur le point M' est $\omega\rho$; les composantes tangentielle et normale ont pour valeurs $\omega\rho\sin\alpha$, $\omega\rho\cos\alpha$; le triangle MA'M', à la limite, est rectangle, $\rho = \frac{e}{\cos\alpha}$, et, par suite, d'après le raisonnement précédent, la force f' est dirigée suivant MM′ et a pour valeur $2\pi e$. La force f' est donc égale et directement opposée à la force f.

Considérons maintenant un point intérieur à la couche électrique et situé sur le prolongement de MM′ à une très-petite distance du point M′. La résultante des actions de la couche entière est nulle en ce point, de sorte que la portion S de la couche exerce en ce point une force f_1 égale et directement opposée à f'. L'action exercée par S au point M diffère infiniment peu de f_1 ou de f' en valeur absolue, ou, par conséquent, de f. D'ailleurs le segment s exerce au point M la répulsion f; par conséquent, la couche entière exerce au point M une répulsion normale à la surface et égale à $2f$ ou $4\pi e$.

Les théorèmes précédents s'appliquent à un système quelconque de conducteurs; il en est de même du théorème de Laplace. Dans ce cas, S désigne la somme des volumes des couches électriques à l'exclusion du petit segment s; la démonstration reste la même.

Ainsi, en chaque point d'un conducteur, s'exerce une force répulsive normale à la surface du conducteur et proportionnelle à l'épaisseur de la couche électrique en ce point. L'électricité exerce donc, en chaque point de la surface du conducteur, une pression normale à la surface du conducteur, proportionnelle, d'une part, à la répulsion précédente $4\pi e$, d'autre part, à l'épaisseur de la couche e: cette pression est donc égale à $4\pi e^2$; *elle est proportionnelle au carré de l'épaisseur électrique*. Cette pression est contre-balancée par la résistance qu'oppose le milieu environnant à l'écoulement de l'électricité.

(*A suivre.*)