NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. LEFÉBURE DE FOURCY

Intersection de deux coniques ayant un axe réel commun

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 49-51

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__49_1>

INTERSECTION DE DEUX CONIQUES AYANT UN AXE RÉEL COMMUN.

Solution géométrique ;

PAR M. R. LEFÉBURE DE FOURCY.

Ce problème peut toujours se ramener à un autre plus simple : Construire les points de rencontre d'un cercle avec une ellipse, l'ellipse ayant son petit axe en prolongement d'un des diamètres du cercle.

Nous présenterons d'abord cette solution et nous généraliserons ensuite.

Pour obtenir les sécantes communes, je construis un cylindre ayant l'ellipse pour section droite, et un cône ayant le cercle pour directrice. Il suffit de placer le sommet de ce cône de telle sorte qu'il se coupe avec le cylindre suivant une courbe plane; l'autre courbe d'entrée sera forcément plane aussi et, en déterminant trois points de chacune d'elles, on aura des plans dont les traces sur le plan des courbes données seront les cordes communes cherchées.

On a tout intérêt à disposer la figure symétriquement. Nous placerons donc les courbes sur le plan horizontal. de telle sorte que l'axe commun soit parallèle à la ligne de terre.

Reste à trouver une courbe plane qu'on puisse placer sur le cône et sur le cylindre. On voit que la section circulaire du cylindre remplit ces conditions. Plaçons-la de telle sorte qu'elle soit sur une même sphère avec le cercle directeur, ce qui est facile, et on pourra faire passer un cône par les deux cercles ; il ne reste plus qu'à en construire le sommet et la projection sur le plan vertical. Les plans des courbes d'intersection se projettent suivant des droites ; il suffira d'en avoir deux points au lieu de trois : on les obtient par l'intersection des génératrices situées aux extrémités de l'axe commun.

Reste à vérifier que les autres cas, compris dans notre en-tête, peuvent se ramener à celui dont nous venons de donner la solution.

1° Les deux courbes sont deux ellipses.

En projetant orthogonalement ou obliquement, suivant les cas, nous pourrons toujours revenir à la figure précédente.

2° Nous avons une courbe fermée et une courbe à branches infinies.

Nous prenons au-dessus de l'axe commun un point sommet de deux cônes, dont les directrices sont les courbes données. En général, une section convenablement choisie nous donnera deux courbes fermées.

Cependant, si nous avons hyperbole et ellipse, dans le cas où les sommets de cette dernière sont de part et d'autre de ceux de l'hyperbole, il faudra mener dans les cônes une section déterminant deux hyperboles, ce qui nous ramènera au dernier cas que nous allons examiner.

3° Cas où les deux courbes sont à branches infinies.

Nous devrons encore nous servir de la projection conique pour fermer les courbes. En général, une seule opération suffira.

Lorsque les deux sommets de la première hyperbole sont intérieurs à l'une des branches de la seconde, une section dans les cônes ne pourra fermer qu'une courbe à la fois. Il faudra fermer l'hyperbole dont les sommets sont intérieurs à l'autre, et nous serons ramenés au cas ordinaire de la construction du n° 2.

Il va sans dire que les plans sécants, menés dans les cônes et dans les cylindres, doivent être perpendiculaires au plan vertical.

C'est à cette condition seulement que les courbes se transforment en conservant un axe commun.