

V. LIGUINE

**Essai d'une classification des engrenages**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 13  
(1874), p. 497-507

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1874\\_2\\_13\\_\\_497\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__497_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**ESSAI D'UNE CLASSIFICATION DES ENGRENAGES;**

PAR M. V. LIGUINE,

Professeur à l'Université d'Odessa.

---

1. Le premier pas qu'on fait en abordant l'étude de la théorie géométrique des mécanismes ou de la Cinématique appliquée (\*) consiste toujours à établir une classification systématique des divers organes de transmission qui font l'objet de cette étude. L'importance d'une pareille classification est évidente; elle est du même ordre que celle des systèmes célèbres de Linné, de Candolle, de Jussieu, en Histoire naturelle, et de tant d'autres systèmes ayant pour but de rendre méthodique l'étude d'une nombreuse série d'objets de même nature et d'en faciliter une énumération complète. Une première classification des mécanismes a été ébauchée par Monge et exécutée par Hachette, Lanz et Bétancourt; elle demeura longtemps classique, jusqu'à ce que M. Willis, en 1841, en proposât une autre, beaucoup plus simple et naturelle, et presque généralement adoptée aujourd'hui (\*\*).

---

(\*) Ce nom, pour l'étude géométrique des transmissions, fut proposé par Bour, par opposition à celui de *Cinématique pure*, introduit par M. Resal, pour la partie théorique de la science qu'Ampère a définie dans son *Essai sur la Philosophie des sciences*, sous le titre général de *Cinématique*. C'est précisément la Cinématique pure que Wronski, comme M. Transon l'a démontré récemment dans ce journal (t. XIII, p. 315-318), avait définie, seize ans avant Ampère, sous le nom de *Phoronomie*; mais la priorité d'une définition complète de la Cinématique appliquée, dont une première idée seulement remonte à Monge, ne peut pas être contestée à Ampère.

(\*\*) Tous les autres systèmes, à l'exception de celui de M. Ch. Laboulaye, ne sont que des modifications des classifications de Monge ou de M. Willis. On trouve une analyse détaillée et savante de tous ces sys-

Par les classifications de Monge et de Willis, tous les mécanismes se trouvent divisés en un certain nombre de classes et de genres; chaque genre renferme une série de types distincts, comme engrenages, excentriques, parallélogrammes, etc.; mais, parmi ces différents types, il y en a quelques-uns qui embrassent eux-mêmes un si grand nombre d'espèces particulières, qu'ils exigent à leur tour une classification spéciale, afin de pouvoir être étudiés d'une manière méthodique et complète.

Parmi ces derniers types figure en première ligne celui des engrenages, dont les systèmes admissibles sont en nombre infini, ce qui dépend de l'arbitraire très-large que comporte le problème fondamental de leur construction géométrique. Je me propose dans cette Note d'exposer une classification spéciale des engrenages, classification systématique et complète qui embrasse toutes les espèces possibles du type, c'est-à-dire non-seulement celles qui ont été proposées jusqu'à présent, mais aussi toutes celles qui sont admissibles, en général, d'après les conditions du problème fondamental. En partant de l'énoncé complètement général de ce dernier problème, renfermant la définition géométrique des engrenages, je commence par établir les caractères distinctifs sur lesquels doit reposer le classement en question; je fais suivre ensuite la classification même, et je finis par rappeler toutes les solutions proposées en théorie ou réalisées en pratique, en les citant consécutivement comme exemples des subdivisions particulières obtenues.

---

tèmes dans un travail récent de M. Reuleaux, intitulé : *Kinematische Mittheilungen*, et inséré dans les *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses in Preussen*, 1871-1874, travail plein d'idées nouvelles et fécondes sur la composition des machines, et destiné peut-être à réformer complètement la Cinématique appliquée, ainsi que la science des machines en général.

2. Le problème général des engrenages s'énonce ainsi :

*Étant donnés deux axes  $C$ ,  $C_1$  situés d'une manière quelconque dans l'espace, trouver deux surfaces  $(s)$ ,  $(s_1)$  qui, étant liées invariablement, la première à l'axe  $C$ , la seconde à l'axe  $C_1$ , et tournant respectivement autour de ces axes avec des vitesses angulaires dont le rapport conserve constamment une même valeur donnée, restent toujours en contact pendant leur mouvement.*

Les deux surfaces  $(s)$ ,  $(s_1)$  ainsi déterminées, et que nous nommerons *surfaces* ou *dents conjuguées*, constituent par leur ensemble un *engrenage* au point de vue géométrique ou cinématique.

Les conditions principales et nécessaires énoncées dans le problème fondamental, pouvant être spécialisées davantage, laissent arbitraires plusieurs nouvelles conditions, compatibles avec les premières, ce qui conduit à établir les distinctions suivantes :

1° Les surfaces conjuguées peuvent être telles, que pendant la transmission de mouvement entre les deux axes leur mouvement relatif soit un roulement simple, ou bien telles, que ce mouvement relatif soit un glissement mixte, c'est-à-dire un mouvement composé d'un roulement et d'un glissement. A ce point de vue, tous les engrenages se subdivisent en *engrenages de roulement* et *engrenages de glissement*. Il est évident qu'en général la pratique doit préférer les premiers aux seconds, attendu que la résistance au roulement est très-peu considérable en comparaison du frottement de glissement ; néanmoins on ne connaît pas de systèmes de roulement satisfaisant en même temps à toutes les autres exigences pratiques, et la plupart des systèmes usités sont des engrenages de glissement.

2° Les surfaces conjuguées peuvent, pendant la transmission de mouvement, être constamment en contact par

une ligne ou par un seul point. Dans les engrenages du premier genre, les dents en prise, agissant l'une sur l'autre simultanément en une infinité de points, peuvent supporter des efforts beaucoup plus considérables que dans les engrenages du second genre, où toute l'action mutuelle des dents en prise est concentrée en un point unique; c'est pourquoi, dans tous les cas où il s'agit de transmettre l'action de forces considérables entre deux axes, on emploie les engrenages du premier genre, appelés pour cette raison *engrenages de force*; tandis que les engrenages du second genre, aptes à ne transmettre que de faibles efforts, sont employés principalement dans les instruments de précision, ce qui leur a fait donner le nom d'*engrenages de précision*.

3° Enfin une troisième distinction essentielle se rapporte à la position relative des axes entre lesquels il s'agit d'établir une transmission de mouvement; à ce nouveau point de vue, trois cas sont possibles, les axes pouvant être : 1° non situés dans un même plan, 2° parallèles, 3° concourants. Toutes choses égales d'ailleurs, le type de l'engrenage sera différent dans chacun de ces trois cas; mais, le cas 1° embrassant les deux autres, il doit aussi exister entre les trois types respectifs d'engrenages une relation qui permet de déduire les types du deuxième et du troisième cas de celui du premier, de manière que, dans une théorie géométrique des engrenages, il suffirait de ne traiter en détail que le premier cas, et d'indiquer ensuite ce que deviennent les résultats obtenus pour les deux cas particuliers, lorsque l'angle entre les axes devient égal à zéro ou à 180 degrés, ou lorsque la plus courte distance des axes s'annule (\*).

---

(\*) Il y a lieu de faire bon marché de la distinction entre les engrenages *extérieurs*, *intérieurs* et à *crémaillère*; car, dans chaque cas par-

3. En adoptant comme premier élément d'une classification générale des engrenages la distinction 1<sup>o</sup>, comme deuxième élément la distinction 3<sup>o</sup>, et comme troisième élément la distinction 2<sup>o</sup>, on obtient le tableau synoptique suivant :

(A) ENGRENAGES DE GLISSEMENT :	(a) <i>Axes non situés dans un même plan :</i>	{ (α) Engrenages de précision. . . .	I
		{ (β) Engrenages de force. . . .	II
	(b) <i>Axes parallèles :</i>	{ (α) Engrenages de précision. . . .	III
{ (β) Engrenages de force. . . .		IV	
(B) ENGRENAGES DE ROULEMENT :	(c) <i>Axes concourants :</i>	{ (α) Engrenages de précision. . . .	V
		{ (β) Engrenages de force. . . .	VI
	(a) <i>Axes non situés dans un même plan :</i>	{ (α) Engrenages de précision. . . .	VII
		{ (β) Engrenages de force. . . .	VIII
	(b) <i>Axes parallèles :</i>	{ (α) Engrenages de précision. . . .	IX
		{ (β) Engrenages de force. . . .	X
(c) <i>Axes concourants :</i>	{ (α) Engrenages de précision. . . .	XI	
	{ (β) Engrenages de force. . . .	XII	

Par cette classification, tous les engrenages admissibles se subdivisent donc en douze variétés distinctes.

4. Il ne me reste qu'à citer des exemples de ces différentes variétés, ce que je ferai en donnant, dans l'ordre de la classification ci-dessus, une énumération de tous les systèmes proposés en théorie et employés en pratique.

VARIÉTÉ I. — 1<sup>o</sup> *Engrenage de précision dont les dents conjuguées sont les enveloppes d'une même surface quelconque qui se meut parallèlement à elle-même dans l'espace* et dont l'exécution mécanique consiste à tailler

---

ticulier, les deux derniers systèmes se déduisent trop facilement du premier, et conservent en même temps les propriétés essentielles de l'espèce. Cette distinction ne peut donc servir utilement d'élément à une classification des engrenages. Il est vrai que la distinction 3<sup>o</sup>, relative à la position des axes, donne lieu à trois systèmes dont les deux derniers se déduisent aussi du premier; mais, dans ce cas, les propriétés essentielles de l'espèce ne restent, en général, plus les mêmes après la transformation.

l'une des roues par une vis triangulaire, et l'autre par l'écrou de cette vis. Ce système fut proposé par Olivier, qui l'annonça à la Société d'encouragement pour l'Industrie en 1831, et en exposa ensuite la théorie dans son important ouvrage sur les Engrenages (\*); plus tard, Olivier construisit même une machine spéciale pour l'exécution pratique de ces engrenages, qui est exposée au Conservatoire des Arts et Métiers.

2° *Engrenage de précision dont les dents conjuguées ont la forme d'hélicoïdes développables* servant d'enveloppes à un plan qui se meut parallèlement à lui-même dans l'espace. Ce système n'est qu'un cas particulier du précédent, savoir lorsque la surface enveloppée est un plan; il fut aussi indiqué par Olivier (\*\*), et reproduit ensuite avec plus de détails relatifs à sa réalisation pratique par M. Pützer (\*\*\*)).

3° *Engrenage de précision dans lequel les dents de l'une des roues sont des hélicoïdes développables et les dents de l'autre des cylindres dont les sections droites sont des développantes de cercle.* Cette solution, due à M. Pützer (\*\*\*\*), est à son tour un cas particulier de la précédente, savoir quand le plan mobile est parallèle à l'un des deux axes de rotation.

4° *Engrenage de précision d'Olivier (\*\*\*\*\*), dans lequel les dents des deux roues sont des cylindres à développantes de cercle,* et que l'on obtient en faisant tourner

---

(\*) *Théorie géométrique des engrenages*, Chap. III ; 1842.

(\*\*) *Ibid.*

(\*\*\*) PÜTZER, *Ueber den spiraloidischen Zahneingriff* (*Zeitschrift des Vereins der deutschen Ingenieure*, Band IV, p. 234 et seq.. 1860).

(\*\*\*\*) *Ibid.*

(\*\*\*\*\*) Voir *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'Industrie nationale*, 1829, p. 430, et 1830, p. 293.

l'une des roues d'un engrenage cylindrique à développantes autour de la droite parcourue par le point de contact de deux dents en prise. Ce système dérive de l'espèce 2<sup>o</sup>, en supposant le plan mobile parallèle à la fois aux deux axes de rotation.

VARIÉTÉ II. — 1<sup>o</sup> *Engrenage de force dans lequel les dents des deux roues sont des hélicoïdes développables.* Ce système, dû à Olivier (\*), dérive de l'espèce 2<sup>o</sup> de la variété précédente, en admettant que les deux cylindres, sur lesquels sont tracées les hélices servant d'arêtes de rebroussement aux hélicoïdes développables conjugués, ont un même plan tangent perpendiculaire au plan enveloppé par les hélicoïdes.

2<sup>o</sup> *Engrenage de force dans lequel l'une des deux dents conjuguées est un hélicoïde développable, l'autre un cylindre à développantes de cercle.* Cette espèce provient de la précédente dans l'hypothèse particulière que le plan enveloppé par les hélicoïdes est parallèle à l'un des deux axes de rotation; elle est due à Olivier, qui la présenta à la Société d'Encouragement en 1830, et l'a beaucoup recommandée à la pratique.

3<sup>o</sup> *Engrenage à vis sans fin,* employé depuis Pappus (\*\*) pour transmettre le mouvement de rotation entre deux axes non situés dans un même plan et rectangulaires. Olivier a démontré (\*\*\*) que le même système peut aussi servir à réunir deux axes non situés dans un plan et formant entre eux un angle aigu.

4<sup>o</sup> *Engrenage hélicoïdal* qui dérive de la vis sans fin

(\*) *Théorie géométrique des engrenages*, p. 41 et 68.

(\*\*) *Pappi Alexandrini mathematicæ collectiones*, lib. VIII, prop. 24 Bonon., 1660.

(\*\*\*) *Théorie géométrique des engrenages*, p. 14 et 87.

en augmentant le nombre des filets et le diamètre de cette vis, et réduisant en même temps son épaisseur (\*).

5° *Système de deux hyperboloïdes primitifs*, représentant les lieux géométriques des axes instantanés des mouvements relatifs de deux systèmes invariables tournant autour des deux axes de rotation avec des vitesses angulaires dont le rapport reste constant. De ce système, indiqué par M. Willis (\*\*), et dont une théorie correcte a été faite pour la première fois par M. Belanger (\*\*\*), dérive, en couvrant deux troncs des hyperboloïdes primitifs par des stries rectilignes fines suivant les génératrices de contact des hyperboloïdes, une solution approximative, étudiée d'abord également par M. Belanger (\*\*\*\*) et nommée *engrenage hyperboloïde*.

6° *Engrenage hyperboloïde à flancs paraboloides de M. Tessari* (\*\*\*\*\*), espèce proposée récemment et dont on a pu voir un modèle en relief à l'Exposition de Vienne en 1873. C'est la première solution rigoureuse pour le système *hyperboloïdique*, analogue aux solutions connues : engrenages à lanterne, à développantes, etc., dans les systèmes *cylindriques* et *coniques* (voir variétés IV et VI).

VARIÉTÉ III. — On ne saurait indiquer de systèmes

(\*) Voir HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Traité théorique et pratique des engrenages*, p. 43, 1861. Il faut bien distinguer cette espèce de l'engrenage dit de *White*, que quelquefois l'on désigne sous le nom d'*engrenage hélicoïdal*, mais qui se rapporte aux variétés IX et XI de notre classification.

(\*\*) WILLIS, *Principles of mechanism*, 1<sup>re</sup> édition, 1841.

(\*\*\*) BELANGER, *Résumé d'une théorie de l'engrenage hyperboloïde* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1861, p. 126).

(\*\*\*\*) *Ibid.*, et *Traité de Cinématique* du même auteur, p. 159-161, 1864.

(\*\*\*\*\*) Voir DOMENICO TESSARI, *Sopra la costruzione degli ingranaggi ad assi non concorrenti* (*Annali del R. Museo industriale italiano*, 1871).

proposés appartenant à cette variété; mais on peut citer comme exemples plusieurs engrenages qui proviendraient des espèces 1-3 de la variété I, en y supposant l'angle des axes égal à zéro ou 180 degrés.

VARIÉTÉ IV. — *Engrenages cylindriques*, système bien connu et le plus répandu en pratique, qui embrasse les genres particuliers suivants :

1° *Engrenage à lanterne*;

2° *Engrenage à développantes*;

3° *Engrenage à flancs* (tracé simple et double);

4° *Engrenage à épicycloïdes* (tracé simple et double).

C'est par des recherches sur les systèmes de cette variété, la plus simple de toutes, que La Hire, Ch. Camus et Euler ont commencé l'étude géométrique des engrenages.

VARIÉTÉ V. — Ce qui a été dit plus haut sur les systèmes de la variété III se rapporte également aux espèces de la variété V, avec cette seule différence que, pour obtenir des exemples de ces dernières, il faut, dans les systèmes 1-3 de la variété I, supposer la plus courte distance entre les axes égale à zéro.

VARIÉTÉ VI. — *Engrenages coniques*, système également connu et répandu comme les engrenages cylindriques et admettant des genres particuliers analogues.

VARIÉTÉ VII. — 1° *Engrenage de roulement inventé par Olivier* en 1816, et dont on trouve la théorie et la description dans le Chapitre IV de son ouvrage sur les engrenages (\*). Dans ce système, ainsi que dans ceux des variétés IX et XI, systèmes regardés pendant long-

---

(\*) *Théorie géométrique des engrenages*, p. 100-114.

temps comme impossibles (\*), les dents doivent être considérées non comme étant terminées par des surfaces, mais comme étant seulement des courbes (\*\*). Les espèces des variétés VII, IX et XI représentent ainsi en quelque sorte des *solutions singulières* du problème fondamental des engrenages.

2° *Engrenage à tire-bouchon d'Olivier* (\*\*\*).

VARIÉTÉ VIII. — La théorie prouve (\*\*\*\*) qu'on ne peut construire aucun système de cette variété.

VARIÉTÉ IX. — *Engrenage à axes parallèles, dit de White* (\*\*\*\*), mais dont la première idée remonte au moins au D<sup>r</sup> Robert Hooke qui, en 1666, présenta un modèle du même engrenage à la Société royale de Londres, et en publia la description en 1674 (\*\*\*\*\*).

(\*) Voir *Théorie géométrique des engrenages*, p. 100. « Pendant longtemps on a cru que l'on ne pouvait pas construire un engrenage dans lequel le frottement fût de roulement, en même temps que le rapport des vitesses des axes était constant. Le Mémoire publié par Euler, dans lequel il avait démontré que, pour les engrenages cylindriques, le frottement est toujours de glissement lorsque le rapport des vitesses des axes est constant, avait contribué à maintenir cette erreur, et cela parce qu'on n'avait pas vu qu'Euler établissait, par le fait, la condition que le point de contact des deux courbes qui se conduisaient ne sortait pas du plan de ces courbes, et qu'il pouvait bien arriver qu'en prenant deux courbes à double courbure leur point de contact se mouvant dès lors dans l'espace, le frottement de glissement se trouvât transformé en frottement de roulement, en assujettissant le point de contact à parcourir dans l'espace une certaine ligne courbe ou droite. »

(\*\*) Voir aussi le Mémoire cité de M. Pützer, § 18.

(\*\*\*) Voir OLIVIER, *Note sur les engrenages de White* (*Journal de M. Liouville*, t. V, 1840).

(\*\*\*\*) Voir OLIVIER, *Théorie géométrique des engrenages*, p. 103.

(\*\*\*\*\*) White a pris un brevet pour ce système en 1808, et l'a décrit d'abord dans une brochure publiée à part, et ensuite, en 1822, dans son *Century of inventions*.

(\*\*\*\*\* ) ROBERT HOOKE, *Cutlerian lectures*, n° 2, p. 70, 1674.

VARIÉTÉ X. — L'unique système possible de cette variété est celui des *cylindres de friction*.

VARIÉTÉ XI. — *Engrenage à axes concourants dit de White* (\*).

VARIÉTÉ XII. — Les *cônes de friction* constituent le seul système possible de cette dernière variété.