Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 483-493

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__483_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 949

(voir 2e série, t. VIII, p. 335);

PAR M. C. HARKEMA.

Trouver toutes les courbes planes pour lesquelles la projection de la normale sur le rayon vecteur est constante. On compte la normale du point de la courbe à une droite fixe donnée, et le rayon vecteur du point de la courbe à un point fixe pris pour pôle.

Les coniques donnent une solution particulière.

(GENOCCHI.)

Prenons pour axes coordonnés le système orthogonal suivant : l'origine O au point fixe donné et l'axe OX parallèlement à la droite donnée MN. Soient P un point de la courbe; PQ la normale comptée de la façon indiquée, $\widehat{\text{POX}} = \theta$, $(\widehat{\text{PQ}, \text{MN}}) = \psi$, $(\widehat{\text{OP}, \text{PQ}}) = \xi$, et la distance $\text{OM} = a$.

La condition du problème s'exprime, d'après cela, comme il suit :

$$(1) \qquad \text{PQ} \cos\xi = \text{const.} = k.$$

On a évidemment

$$\xi = \psi - \theta, \quad \tan\!g\,\theta = \frac{y}{x}, \quad \tan\!g\,\psi = -\frac{dx}{dy};$$

donc

$$\cos\xi = \frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

La longueur de la normale est, dans ce cas,

$$(y-a)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

L'équation (1) devient donc, après la substitution des valeurs trouvées,

$$(y-a)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{dx^2+dy^2}} = k,$$

ou bien, après quelques faciles transformations,

$$(2) \qquad (y-a)\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} - k\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\,\frac{dx}{x} = 0.$$

Tout revient à intégrer cette équation différentielle. A cet effet, faisons la substitution $\frac{y}{x} = z$; il vient

$$(3) \qquad (xz - a)\,dz - k\sqrt{1+z^2}\,\frac{dx}{x} = 0.$$

Posons maintenant

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad \text{d'où} \quad dx = -\frac{d\xi}{\xi^2};$$

l'équation (3) devient

$$\left(\frac{z}{\xi} - a\right) dz + k\sqrt{1+z^2}\frac{d\xi}{\xi} = 0,$$

ou bien

$$(4) \qquad \frac{d\xi}{dz} - \frac{a}{k\sqrt{1+z^2}}\xi = -\frac{z}{k\sqrt{1+z^2}}.$$

Cette équation est linéaire, et l'on peut trouver son intégrale d'après la formule connue exprimant l'intégrale d'une équation linéaire; mais nous préférons, pour faciliter l'intégration, faire encore la substitution suivante :

$$\sqrt{1+z^2} = z + \omega, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{1-\omega^2}{2\omega}, \quad dz = -\frac{1+\omega^2}{2\omega^2}d\omega.$$

D'après cela, nous aurons, au lieu de l'équation (4),

$$(5) \qquad \frac{d\xi}{d\omega} + \frac{a}{k\omega}\xi = \frac{1-\omega^2}{2k\omega^2}.$$

L'intégrale de cette équation est

$$(6) \qquad \xi = \omega^{-\frac{a}{k}}\left(\frac{1}{2k}\int\frac{\omega^{\frac{a}{k}} - \omega^{\frac{a}{k}+2}}{\omega^2}d\omega + C\right).$$

Supposons pour un moment $k \gtrless a$; alors cette intégrale pourra s'écrire

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2k}\left(\frac{\omega^{-1}}{\frac{a}{k}-1} - \frac{\omega}{\frac{a}{k}+1}\right) + C\omega^{-\frac{a}{k}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a-k)\omega} - \frac{\omega}{a+k}\right] + C\omega^{-\frac{a}{k}}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on substitue au lieu de ξ et ω leurs valeurs en x et y, à savoir $\frac{1}{x}$ et $\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{x}$, on obtient l'équation intégrale de (2) :

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{2}\left[\frac{x}{(a-k)\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{(a+k)x}\right] \\ &+ C\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{x}\right)^{-\frac{a}{k}}. \end{aligned} \right.$$

Cette équation, dont le degré dépend du rapport $\frac{a}{k}$, représente les courbes cherchées. Dans le cas particulier $C=0$, cette équation représente une conique. En effet, on a alors

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{(a-k)\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{(a+k)x}\right];$$

si l'on multiplie par $\sqrt{x^2+y^2}+y$ les deux termes de la première fraction entre parenthèses, on obtient

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{(a-k)x} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{(a+k)x}\right],$$

et enfin, réduisant et faisant disparaître le radical,

$$(9)\quad k^2x^2 + (k^2-a^2)y^2 - 2(k^2-a^2)y - (k^2-a^2)^2 = 0.$$

Cette équation représente une ellipse si $k > a$, une hyperbole si $k < a$. Si $a \lessgtr 0$, $k=0$, on a la droite $y-a=0$, et la longueur de la normale s'annule. Dans le cas $a=0$, $k \gtrless 0$, cette équation devient

$$x^2+y^2=k^2,$$

et représente un cercle de rayon k.

Supposons maintenant $k=a$, et reprenons la formule (6), nous aurons

$$\xi = \frac{1}{2k}\frac{\log\omega}{\omega} - \frac{1}{4k}\omega + \frac{C}{\omega},$$

ou bien

$$4k\omega\xi - 2\log\omega + \omega^2 - 4kC = 0.$$

La substitution des valeurs connues de ω et de ξ nous donne

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{4k\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)}{x^2} - 2\log\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{x}\right) \\ &\qquad + \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{x}\right)^2 - 4kC = 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui est l'équation d'une courbe transcendante.

Note. — Cette question, dont la solution a été insérée dans les *Nouvelles Annales* (*voir* 2e série, t. X, p. 42), fut résolue d'une manière incomplète, je dirais même fautive. En effet, par une solution particulière on entend une solution qui se déduit de la solution générale en attribuant à la constante arbitraire une valeur particulière. Or, de l'intégrale donnée par l'auteur de la solution (p. 43), on ne saurait déduire l'équation d'une conique, en attribuant à la constante C une valeur particulière. L'auteur déduit cette équation en supposant que le pôle est situé sur la droite donnée, ce qui n'est point indispensable.

Généralisation de la question 1069

(voir 2e série, t. XI, p. 143);

PAR M. KOEHLER.

Si trois coniques ont deux à deux un foyer commun, leurs cordes communes concourent trois à trois.

(E. LEMOINE.)

La propriété dont il s'agit peut être envisagée comme un corollaire d'un théorème plus général qui, je crois, n'a pas encore été remarqué.

Si l'on a trois droites α, β, γ passant par un point P, trois autres α', β', γ' passant par un point P', et trois coniques K_1, K_2, K_3 inscrites respectivement dans les quadrilatères $(\beta\beta'\gamma\gamma')$, $(\gamma\gamma'\alpha\alpha')$, $(\alpha\alpha'\beta\beta')$, six de leurs cordes communes concourent trois à trois.

Soient $D = 0$ l'équation de la droite PP'; $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ celles des droites qui joignent les points $(\beta.\gamma', \gamma.\beta')$, $(\gamma.\alpha', \alpha.\gamma')$, $(\alpha.\beta', \beta.\alpha')$.

On aura, si l'on multiplie les diverses équations par des coefficients numériques convenablement choisis, les relations

$$\beta\beta' - \gamma\gamma' = A.D, \quad \gamma\gamma' - \alpha\alpha' = B.D, \quad \alpha\alpha' - \beta\beta' = C.D,$$

et

$$A + B + C = 0,$$

cette dernière exprimant que A, B, C passent par un même point. L'équation de la conique K_1 peut s'écrire sous les deux formes

$$4l^2\beta\beta' = (D + l^2 A)^2,$$
$$4l^2\gamma\gamma' = (D - l^2 A)^2,$$

$D + l^2 A = 0$ et $D - l^2 A = 0$ représentant les deux cordes de contact correspondant aux angles circonscrits $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, cordes qui passent, comme on sait, par le point d'intersection de A et D, et forment avec ces droites un faisceau harmonique.

On aura de même, pour K_2, les deux formes

$$4m^2\gamma\gamma' = (D + m^2 B)^2, \quad 4m^2\alpha\alpha' = (D - m^2 B)^2,$$

et pour K_3

$$4n^2\alpha\alpha' = (D + n^2 C)^2, \quad 4n^2\beta\beta' = (D - n^2 C)^2.$$

Cela posé, un des systèmes de cordes communes à K_2 et K_3, celui dont le sommet est à l'intersection des cordes de contact $D - m^2 B = 0$ et $D + n^2 C = 0$, aura pour équation

$$\left(\frac{D + n^2 C}{n}\right)^2 - \left(\frac{D - m^2 B}{m}\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1)\ -m^2 n B + m n^2 C + D(m + n) = 0, \quad (1')\ m^2 n B + m n^2 C + D(m - n) = 0.$$

Les deux systèmes analogues relatifs à (K_3, K_1) et (K_1, K_2) sont

(2) $-n^2lC + nl^2A + D(n+l) = 0$, (2') $n^2lC + nl^2A + D(n-l) = 0$,

(3) $-l^2mA + lm^2B + D(l+m) = 0$, (3') $l^2mA + lm^2B + D(l-m) = 0$.

Je considère les trois cordes (1'), (2) et (3).

En introduisant la condition $A + B + C = 0$, les trois équations deviennent

$$m^2nB + mn^2C - D(m-n) = 0,$$
$$-nl^2B - (nl^2 + n^2l)C + D(l+n) = 0,$$
$$(lm^2 + l^2m)B + l^2mC + D(l+n) = 0.$$

Or le déterminant de ces trois équations est nul ; il peut en effet s'écrire

$$-\frac{D}{l^2m^2n^2}\begin{vmatrix} m & n & \dfrac{m-n}{mn} \\ l & l+n & -\dfrac{l+n}{nl} \\ l+m & l & \dfrac{l+m}{ml} \end{vmatrix},$$

ou, en ajoutant aux éléments de la première ligne ceux des deux dernières,

$$-\frac{2D}{l^2m^2n^2}\begin{vmatrix} l+m & n+l & 0 \\ l & n+l & -\dfrac{n+l}{nl} \\ l+m & l & \dfrac{l+m}{ml} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{2D(m+l)(n+l)}{l^3m^2n^2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{l}{l+m} & 1 & -\dfrac{l+n}{n} \\ 1 & \dfrac{l}{n+l} & \dfrac{l+m}{m} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{2D(m+l)(n+l)}{l^3m^2n^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{l}{l+m} & \dfrac{m}{l+m} & -\dfrac{l+n}{n} \\ 1 & -\dfrac{n}{l+n} & \dfrac{l+m}{m} \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi les droites (1′), (2), (3) se coupent en un même point. Il en est de même des deux autres groupes (2′), (3), (1) et (3′), (1), (2).

Pour passer de là au théorème de M. Lemoine, il suffit de supposer que les points P et P′ sont les deux points imaginaires situés à l'infini sur un cercle.

Voici, du reste, la démonstration directe :

Soient (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3) les coordonnées rectangulaires des trois foyers; K_{23}, K_{31}, K_{12} les trois coniques qui ont deux à deux un foyer commun, et dont les axes focaux sont a, b, c.

Si l'on pose

$$\begin{aligned}
(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2&=\delta_1^2,\\
(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2&=\delta_2^2,\\
(x-\alpha_3)^2+(y-\beta_3)^2&=\delta_3^2,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
(2x-\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_2)+(2y-\beta_2-\beta_3)(\beta_3-\beta_2)&=A_1,\\
(2x-\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_3)+(2y-\beta_3-\beta_1)(\beta_1-\beta_3)&=A_2,\\
(2x-\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)+(2y-\beta_1-\beta_2)(\beta_2-\beta_1)&=A_3,
\end{aligned}$$

les équations des coniques pourront s'écrire

$$K_{23}\left\{\begin{aligned}4a^2\delta_3^2&=(A_1-a^2)^2,\\ 4a^2\delta_2^2&=(A_1+a^2)^2,\end{aligned}\right. \qquad K_{31}\left\{\begin{aligned}4b^2\delta_1^2&=(A_2-b^2)^2,\\ 4b^2\delta_3^2&=(A_2+b^2)^2,\end{aligned}\right.$$

$$K_{12}\left\{\begin{aligned}4c^2\delta_2^2&=(A_3-c^2)^2,\\ 4c^2\delta_1^2&=(A_3+c^2)^2.\end{aligned}\right.$$

Les systèmes de cordes communes qui se coupent aux points d'intersection des directrices correspondantes seront

$$\begin{aligned}
&(1)\quad cA_2-bA_3-bc(b+c)=0, &&(1')\quad cA_2+bA_3-bc(b-c)=0,\\
&(2)\quad aA_3-cA_1-ca(c+a)=0, &&(2')\quad aA_3+cA_1+ca(c-a)=0,\\
&(3)\quad bA_1-aA_2-ab(a+b)=0, &&(3')\quad bA_1+aA_2+ab(a-b)=0.
\end{aligned}$$

On verrait, comme ci-dessus, que les déterminants des équations (1'), (2), (3); (2'), (3), (1); (3'), (1), (2) sont nuls.

Question 1123

(voir 2e série, t. XII, p. 528);

PAR M. A. PELLISSIER.

Les conditions pour que l'hyperboloïde

$$ayz + bzx + cxy + abc = 0$$

soit de révolution sont, λ, μ, ν *étant les angles des axes et* a, b, $c > 0$,

$$\frac{a}{1 - \cos\lambda} = \frac{b}{1 - \cos\mu} = \frac{c}{1 - \cos\nu}.$$

On propose d'interpréter géométriquement ces relations. (A. DE SAINT-GERMAIN.)

Soit

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu - R^2 = 0$$

l'équation d'une sphère concentrique à l'hyperboloïde; l'équation générale des surfaces passant par l'intersection des deux premières sera

$$k(x^2 + y^2 + z^2) + yz(2k\cos\lambda + a) + zx(2k\cos\mu + b) \\ + xy(2k\cos\nu + c) - kR^2 + abc = 0.$$

Si l'hyperboloïde est de révolution, on devra pouvoir déterminer k de telle sorte que cette équation représente deux plans parallèles, c'est-à-dire que les trois plans du centre

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x2k + y(2k\cos\nu + c) + z(2k\cos\mu + b) = 0, \\ x(2k\cos\nu + c) + y2k + z(2k\cos\lambda + a) = 0, \\ x(2k\cos\mu + b) + y(2k\cos\lambda + a) + z2k = 0 \end{array}\right.$$

devront se réduire à un seul.

On trouve ainsi les conditions

$$2k = 2k\cos\lambda + a = 2k\cos\mu + b = 2k\cos\nu + c,$$

et, pour que les valeurs de k fournies par ces équations soient identiques, il faut que

$$\frac{a}{1-\cos\lambda} = \frac{b}{1-\cos\mu} = \frac{c}{1-\cos\nu}.$$

L'un quelconque des plans (1) peut alors se mettre sous la forme

$$\frac{a}{1-\cos\lambda}x + \frac{b}{1-\cos\mu}y + \frac{c}{1-\cos\nu}z = 0,$$

et il est clair que l'axe de révolution est perpendiculaire à ce plan. Or, en appelant α, β, γ les angles que fait cet axe avec Ox, Oy, Oz, l'équation du plan qui lui est perpendiculaire peut aussi s'écrire

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0,$$

ce qui montre que $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont respectivement proportionnels aux quantités $\frac{a}{1-\cos\lambda}$, $\frac{a}{1-\cos\mu}$, $\frac{c}{1-\cos\nu}$. Ces dernières étant égales, on en conclut que les angles α, β, γ sont égaux.

Remarquons maintenant que Ox, Oy, Oz sont trois génératrices du cône asymptote de l'hyperboloïde

$$ayz + bzx + cxy = 0,$$

et, comme ce cône est de révolution, il en résulte que l'axe fait un angle constant avec toutes ses génératrices, par suite aussi avec les génératrices de l'hyperboloïde, qui sont parallèles aux premières.

Donc les relations

$$\frac{a}{1-\cos\lambda} = \frac{b}{1-\cos\mu} = \frac{c}{1-\cos\nu}$$

ne sont que l'expression de la propriété bien connue de l'hyperboloïde de révolution.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.