NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. LAUNOY

Solution des questions élémentaires proposées au concours d'agrégation de 1873

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 480-483

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__480_1>

SOLUTION DES QUESTIONS ÉLÉMENTAIRES PROPOSÉES AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1873;

Par M. G. LAUNOY,
Professeur au lycée de Tournon.

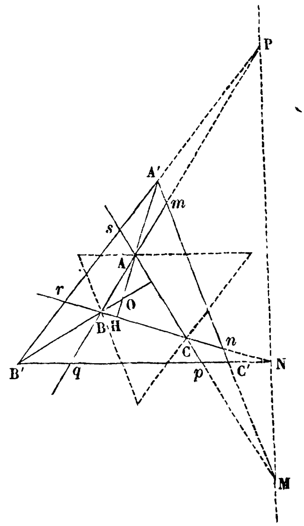
Solution de la question de Géométrie.

ABC (*fig.* 1) est le triangle proposé; m, n, p, q, r, s sont les points de contact des cercles exinscrits; $A'B'C'$ est le triangle résultant.

1° La première partie se démontre sans difficulté.

2° La hauteur AH du triangle ABC rencontre les côtés A′B′, A′C′ de A′B′C′ en A′ et A″.

Fig. 1.



Alors le triangle AHC et la transversale A′B′ donnent

$$\frac{A'A}{A'H} = \frac{sA}{rH};$$

de même, le triangle AHB et la transversale A′C′ donnent

$$\frac{A''A}{A''H} = \frac{mA}{nA};$$

il suffit alors de vérifier la proportion

$$\frac{sA}{rH} = \frac{mA}{nH} \quad \text{ou} \quad \frac{sA}{mA} = \frac{rH}{nH}.$$

Or

$$\frac{sA}{mA} = \frac{p-b}{p-c}$$

et

$$\frac{r\text{H}}{n\text{H}} = \frac{r\text{B} + \text{BH}}{n\text{C} + \text{CH}} = \frac{p - a + \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2b}}{p - a + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}} = \frac{p - b}{p - c};$$

donc le théorème est démontré.

3° La considération des angles montre immédiatement que le point O, commun aux trois hauteurs du triangle ABC, est le centre de la circonférence circonscrite au triangle A′B′C′.

Remarque. — ABC et A′B′C′ sont homologiques; O est le centre d'homologie, l'axe passe par les trois points (AB, A′B′), (AC, A′C′), (BC, B′C′).

Solution de la question de Mécanique.

A, B, C,..., L est le système proposé des points dont le nombre est n; O est le centre de la sphère; m est la position d'équilibre cherchée. Remplaçons la sphère par une force mR passant par O; le point m entièrement libre est alors en équilibre sous l'action simultanée des efforts mA, mB,..., mR, et par conséquent il occupe la position du centre de gravité d'un système de $(n + 1)$ points massifs égaux ayant leurs centres respectifs en A, B,..., R (Leibnitz). En second lieu, si l'on prolonge mR au delà de m de la $n^{ième}$ partie de sa longueur, on obtiendra le centre de gravité des n points massifs A, B,..., L, c'est-à-dire le centre des moyennes distances G du système proposé. Donc :

1° La position d'équilibre du point m est sur la droite OG;

2° La réaction sphérique est égale à $n.m$G.

Il est d'ailleurs évident que les points de la sphère pour lesquels la composante normale est donnée seront distribués symétriquement autour de la position d'équilibre : le lieu demandé sera donc une circonférence de pôle *m* tracée sur la sphère.

Remarque. — Le point *m* peut être assujetti à rester sur la sphère de trois manières différentes :

1° Il est fixé à l'extrémité d'un fil flexible et inextensible ou bien placé à l'intérieur d'une sphère creuse : une seule position d'équilibre entre O et G. L'équilibre est stable.

2° Il est posé simplement sur la sphère : une seule position d'équilibre au delà de O. L'équilibre est instable.

3° Enfin il est fixé à l'extrémité d'une tige rigide et sans poids : deux positions d'équilibre, l'une stable et l'autre instable.