NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. MALEYX

Quelques théorèmes de géométrie, suivis d'une étude géométrique des propriétés de la strophoïde

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 468-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__468_1>

QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE,

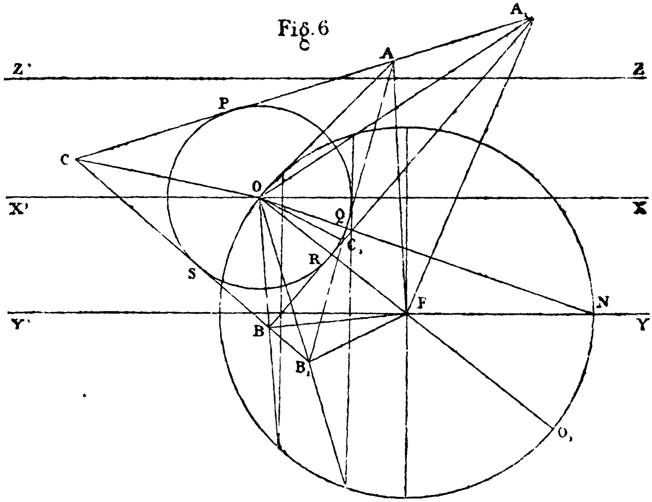
suivis d'une Étude géométrique des propriétés de la strophoïde

(voir même tome, p. 404);

PAR M. L. MALEYX.

Nous allons maintenant envisager la strophoïde à un autre point de vue. Le triangle QFB′ étant isoscèle, il en résulte qu'on peut considérer le point B′ comme le point de contact avec la droite OB′ d'une parabole ayant le point F pour foyer, et pour axe la droite Y′Y. On peut donc considérer la strophoïde comme le lieu des points de contact des tangentes qu'on peut mener d'un point fixe O à une suite de paraboles homofocales. Deux points correspondants B′, D′ sont les points de contact d'une même parabole avec les deux tangentes qu'on peut lui mener du point O. En effet, on sait, d'après un théorème bien connu, que ces deux tangentes sont également inclinées sur le rayon FO et sur l'axe, ou sa parallèle OX.

Soient (*fig.* 6) A, B, A_1, B_1 deux couples de points



correspondants; les angles AOB, A_1OB_1 sont divisés en deux parties égales par ON.

Nous désignerons désormais le point F par la dénomination de *foyer*.

Deux rayons OA, OB, dirigés du point double vers deux points correspondants, sont vus du foyer F sous des angles égaux et supplémentaires de l'angle AOB des deux rayons (Th. II, *Coroll. III*).

Le produit des rayons dirigés du foyer F vers deux points correspondants est constant et égal au carré du rayon du cercle de construction (Th. II, *Coroll. II*) :

$$\overline{OF}^2 = FB \times FA.$$

Il en résulte que, si l'on transforme la strophoïde par rayons vecteurs réciproques, en prenant le foyer pour pôle, et pour puissance le carré du rayon du cercle de construction, le point transformé de A sera le symétrique de B par rapport à OF. Donc la transformée sera une nouvelle strophoïde symétrique de la première par rapport à OF.

Il en résulte encore que les tangentes à la strophoïde, en deux points correspondants A, B, font, avec les rayons menés du foyer aux points de contact, des angles égaux.

Les carrés des distances du point double de la strophoïde à deux points correspondants sont proportionnels aux distances des mêmes points au foyer (Th. II, *Coroll. II*).

Les droites qui unissent deux points A, A_1 et leurs correspondants B, B_1 sont les bases de deux triangles semblables ayant leur sommet commun au foyer. En effet, des égalités

$$\mathrm{BFO} = \mathrm{OFA},$$
$$\mathrm{B_1FO} = \mathrm{OFA_1},$$

on déduit

$$\mathrm{AFA_1} = \mathrm{BFB_1};$$

de plus

$$\overline{\mathrm{OF}}^2 = \mathrm{FA} \times \mathrm{FB} = \mathrm{FA_1} \times \mathrm{FB_1};$$

d'où

$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{FA_1}} = \frac{\mathrm{FB_1}}{\mathrm{FB}}.$$

Les deux triangles ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels.

Soit C_1 le point où se coupent les droites A_1B, AB_1 : les triangles BFA_1, B_1FA sont aussi semblables, comme ayant un angle égal en F compris entre côtés proportionnels ; il en résulte l'égalité des angles

$$FA_1C_1 = FAC_1,$$
$$FB_1C_1 = FBC_1;$$

donc les deux quadrilatères AA_1C_1F, BB_1C_1F sont inscriptibles.

De la similitude des triangles AA_1F, BB_1F on déduit aussi les égalités

$$CA_1F = B_1BF,$$
$$CB_1F = A_1AF;$$

donc les deux quadrilatères BFA_1C, B_1FAC sont aussi inscriptibles.

D'après le théorème IV, la droite OA_1 divise l'angle AA_1B en deux parties égales, de même pour la droite OB_1, par rapport à AB_1B ; pour le même motif, les droites AA_1, AB_1 forment avec OA des angles égaux, et il en est de même de BA_1, BB_1, par rapport à OB. Le point O est donc équidistant des quatre droites AA_1, AB_1, A_1B, BB_1; donc elles sont tangentes à un même cercle ayant le point O pour centre : on peut conclure de la remarque faite sur ce théorème IV qu'elles sont en même temps tangentes à une parabole ayant F pour foyer et $Y'Y$ pour axe. Désignons par P, Q, R, S les points de contact des quatre droites avec le cercle dont le centre est au point double ; on a

$$AA_1 = A_1P - AP = A_1R - AQ,$$
$$BB_1 = B_1S - BS = B_1Q - BR.$$

Retranchant

$$AA_1 - BB_1 = A_1B - AB_1,$$

qu'on peut écrire sous l'une des formes

$$A_1B - AA_1 = AB_1 - BB_1,$$
$$AA_1 + AB_1 = BB_1 + BA_1.$$

De la première, on peut conclure que le lieu des points A_1, B_1 est celui des points de contact des tangentes qu'on peut mener du point O à une suite d'hyperboles ayant pour foyers A et B ; A_1 est aussi le pied d'une normale menée du point O à une ellipse ayant pour foyers A et B : il en est de même de B_1 ; mais les ellipses auxquelles OA_1, OB_1 sont normales, sont distinctes, tandis que OA_1, OB_1 sont tangentes à la même hyperbole.

De la seconde forme, on peut conclure que les points A_1, B_1 sont foyers d'une même ellipse tangente en A et B aux droites fixes OA, OB. Du reste, il n'y a rien d'absolument déterminé quant au genre des courbes auxquelles on mène des tangentes du point O, ni quant à celui des courbes tangentes à OA et OB en A et B ; ce genre dépend de la position des points A et B par rapport à A_1 et B_1 : les conclusions précédentes se rapportent à la figure particulière que nous avons considérée.

Donc, en général, la strophoïde peut être considérée comme le lieu des points de contact de toutes les tangentes qu'on peut mener de son point double à toutes les courbes homofocales du second degré, et ayant deux de ses points correspondants quelconques pour foyers.

Les paraboles homofocales qui nous ont servi à établir cette propriété ne constituent qu'un cas particulier de cette infinité de systèmes de courbes du second degré.

La strophoïde est aussi le lieu des foyers des courbes du second degré tangentes aux rayons dirigés de son point double vers deux de ses points correspondants quelconques, le contact ayant lieu en ces points.

On reconnaît facilement que les points C, C_1 sont points de contact des droites OC, OC_1 avec une hyperbole ayant A et B pour foyers ; donc ils appartiennent à la strophoïde, et, comme ces droites OC, OC_1 sont également inclinées sur OA, OB, et, en conséquence, sur

ON, d'après un théorème connu, il en résulte que C et C_1 sont correspondants.

D'après cela, on peut formuler le théorème suivant :

Si l'on circonscrit un quadrilatère à un cercle et qu'on le complète, ses six sommets sont sur une même strophoïde dont le centre du cercle est le point double; son foyer est celui de la parabole inscrite au quadrilatère; sa direction asymptotique, celle de l'axe de cette parabole; les trois diagonales du quadrilatère sont tangentes à la parabole ayant pour foyer le point symétrique du point double de la strophoïde par rapport au foyer, et pour directrice la parallèle à l'asymptote menée par le point double.

Il nous sera maintenant facile de construire la tangente en un point de la courbe. Supposons que la droite A_1B_1 se rapproche indéfiniment de AB, les angles OAC, OAC_1 sont constamment égaux; mais, à la limite, AC_1 se confondra avec AB, et AC avec la tangente en A : donc la tangente au point A est symétrique de la droite qui unit le point A à son correspondant, par rapport au rayon qui unit le point double au point de contact.

Quand A_1B_1 vient se confondre avec AB, OC_1 devient perpendiculaire à AB, et la limite de C_1, qui est la projection du point double sur AB, appartient à la strophoïde.

On peut donc considérer la strophoïde comme le lieu des projections de son point double sur les droites unissant deux de ses points correspondants.

Ces droites enveloppent une parabole que nous avons définie, et le point double de la strophoïde est sur la directrice de cette courbe. Donc la strophoïde est podaire d'une parabole, si l'on prend pour pôle un point quelconque de la directrice.

Si l'on prenait pour pôle un point non situé sur la directrice, la podaire ne pourrait être une strophoïde, car ses tangentes au point double ne seraient plus rectangulaires.

Si l'on considère un triangle et le cercle inscrit, le centre du cercle inscrit est point double commun de trois strophoïdes passant toutes les trois par les trois sommets; de plus, chacune d'elles passe par l'un des points de contact du cercle et de l'un des côtés; les deux autres côtés lui sont alors tangents aux extrémités de celui sur lequel se trouve le point de contact.

Soit une strophoïde donnée par son foyer, son point double, la direction asymptotique; on donne la droite A_1C passant par un point A_1 de la courbe : on propose de trouver les autres points communs de la droite et de la courbe.

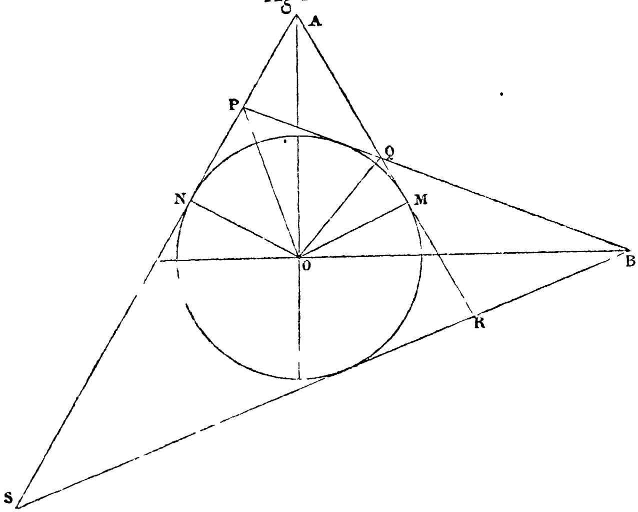
Du point double O comme centre, nous décrirons un cercle tangent à A_1C; puis nous déterminerons le point B_1 correspondant à A_1. De ce point, nous mènerons deux tangentes au cercle : leurs intersections A, C avec la droite A_1C nous donneront la solution.

Nous allons démontrer maintenant que la strophoïde a la propriété de se transformer en elle-même par rayons vecteurs réciproques, et sans altération de position, en prenant pour pôle l'un des points correspondants principaux, et pour puissance le carré de sa distance au point double.

Pour construire le lieu par points, nous pouvons déterminer ses deux points correspondants principaux, puis, de ces points, mener des couples de tangentes à un cercle variable dont le centre soit au point double; chaque cercle variable nous fournira quatre points nouveaux, sommets d'un quadrilatère inscriptible. En effet, les rayons qui vont du point double aux points correspondants principaux sont rectangulaires ; de plus, ils sont bissectrices des angles formés par les côtés opposés du quadrilatère dont les quatre sommets sont les points que nous venons de construire ; mais on sait que les angles de ces bissectrices sont respectivement demi-somme de deux angles opposés du quadrilatère ; donc ces angles sont supplémentaires et le quadrilatère est inscriptible.

Soient donc (*fig.* 7) A, B les points correspondants principaux d'une strophoïde dont O est le point double ;

Fig 7



nous venons de montrer que les quatre points P, Q, R, S, qui appartiennent à cette courbe, sont situés sur un cercle, et qu'en conséquence

$$BP \times BQ = BS \times BR,$$
$$AP \times AS = AQ \times AR.$$

Pour établir le théorème énoncé, il suffit de montrer que le produit $BP \times BQ$ est égal au carré de BO, et que $AQ \times AR$ est égal à celui de AO.

On voit facilement que l'angle POQ est la moitié de l'angle NOM, qui est lui-même le supplément de l'angle A; donc

$$POQ = \frac{\pi}{2} - OAM,$$

$$PQO = OQM = \frac{\pi}{2} - QOM = \frac{\pi}{2} - QOB + MOB.$$

Ajoutant ces deux égalités membre à membre, en observant que les deux angles OAM, MOB sont égaux, comme ayant leurs côtés perpendiculaires, on a

$$POQ + PQO = \pi - QOB,$$

d'où

$$QOB = OPB.$$

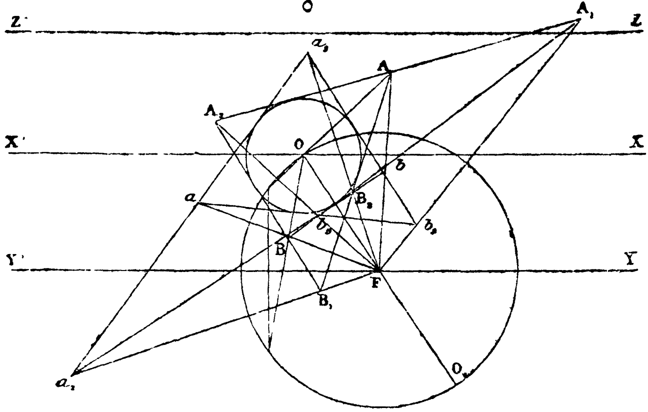
Dès lors, les deux triangles POB, QOB sont semblables, et l'on en déduit la première des égalités à démontrer :

$$\frac{PB}{OB} = \frac{OB}{BQ} \quad \text{ou} \quad \overline{OB}^2 = BP \times BQ.$$

La seconde s'établit de la même façon : la proposition est justifiée.

Soient (*fig.* 8) F le foyer d'une strophoïde, O son point double, $X'X$ la direction asymptotique, A, B deux points correspondants. Décrivons, du point O comme centre, un cercle arbitraire, et menons-lui des tangentes des points A et B. Ces tangentes se coupent en quatre points A_1, B_1, A_2, B_2, qui appartiennent à la courbe et sont correspondants deux à deux. Nous avons vu que les quatre quadrilatères AA_1B_2F, BB_1B_2F, AA_2B_1F, A_1A_2BF sont inscriptibles. On peut établir ce fait de plusieurs autres manières : d'abord il résulte de la remarque faite sur le théorème IV que les quatre droites AA_2, AB_1, BA_2, BA_1 sont tangentes à une même parabole ayant F pour foyer et Fy pour axe; donc, d'après un théorème connu, les

Fig 8



quatre cercles circonscrits aux triangles AA_1B_2, AA_2B_1, BA_1A_2, BB_1B_2 passent par le foyer F de cette parabole. En second lieu, nous avons vu que, si l'on transformait la strophoïde par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle le foyer et pour puissance le carré de sa distance au point double, on obtenait une seconde strophoïde symétrique de la première par rapport à la droite OF. Soient a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 les points symétriques de A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 par rapport à OF; les points a, a_1, a_2 étant sur une même ligne droite, B, B_1, B_2, qui en sont les transformés, sont sur un cercle passant par le pôle F. Les quatre quadrilatères AA_1B_2F, BB_1B_2F, AA_2B_1F, A_1A_2BF sont donc inscriptibles dans des cercles respectivement transformés des quatres droites bb_1a_2, aa_1a_2, bb_2a_1, b_1b_2a. Or les quatre droites ba_2, aa_2, ba_1, b_1a sont tangentes au cercle de centre O; donc les quatre cercles transformés sont tangents à un même cercle transformé du cercle O. Ce cercle transformé a son centre sur OF et coupe orthogonalement le cercle transformé de la perpendiculaire à OF en O; donc la strophoïde peut être considérée comme le lieu des points communs des cercles passant par son foyer F et deux de ses points correspondants A, B, et tangents à un cercle variable dont le centre se meut sur OF, et qui coupe orthogonalement le cercle ayant OF pour diamètre.

Les quatre droites ba_2, aa_2, ba_1, b_1a sont aussi tangentes à une même parabole ayant F pour foyer et pour axe la droite symétrique de Y'Y par rapport à OF; donc les quatre cercles transformés sont tangents à la courbe transformée de cette parabole, courbe qui, d'après le corollaire II du théorème III, est un limaçon de Pascal.

Les droites ab, a_1b_1, a_2b_2, qui unissent deux points correspondants de la seconde strophoïde, enveloppent une parabole ayant pour foyer le point O_1 et pour directrice la symétrique de X'X par rapport à OF; donc les cercles transformés qui passent par le foyer de la première strophoïde et deux de ses points correspondants enveloppent une courbe transformée de la parabole fixe dont il vient d'être question.

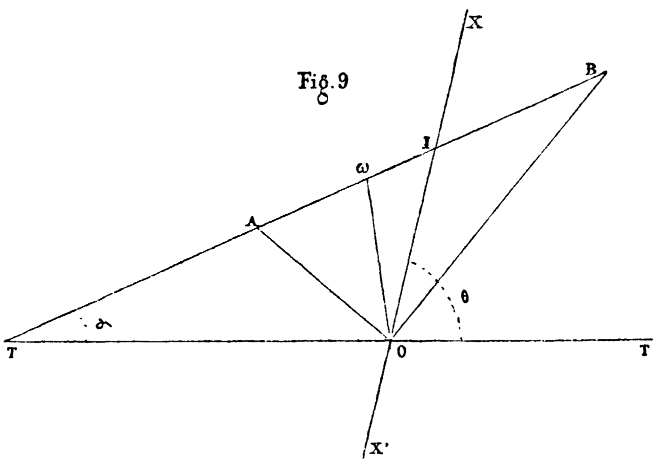
La courbe transformée par rayons vecteurs réciproques d'une strophoïde, en prenant le point double pour pôle, est une hyperbole équilatère.

En effet, soient O le point double d'une strophoïde, A, B deux points correspondants fixes de la courbe, B_2 un point variable sur cette ligne. Les angles OB_2A, OB_2B sont égaux; on peut donc considérer la strophoïde comme le lieu du point commun de deux segments capables d'un même angle variable, respectivement décrits sur les droites fixes OA, OB. Si nous transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, en prenant le point O pour pôle, nos deux cercles qui passent par le point O et par les deux points fixes A, B, en coupant les droites OA, OB sous un même angle, se transformeront en deux droites passant par les points transformés de A et B, que nous appellerons respectivement α et β, et qui feront avec $O\alpha$ et $O\beta$ des angles égaux, et, en conséquence, avec $\alpha\beta$ des angles dont la différence sera fixe. On sait que le lieu du sommet d'un triangle dont la base est fixe, ainsi que la différence des angles à la base, est une hyperbole équilatère : la proposition est ainsi démontrée.

Le lieu géométrique du point conjugué harmonique du foyer d'une strophoïde, par rapport aux deux points de rencontre de cette courbe avec une sécante issue du foyer, est une circonférence de cercle.

Soient, en effet (*fig.* 9), F et O le foyer et le point

Fig. 9



double d'une strophoïde, X'X la direction asymptotique; deux de ses points A, B, en ligne droite avec le foyer, sont placés aux extrémités de deux rayons rectangulaires issus du point O; l'angle AOB étant droit, pour construire le point ω conjugué harmonique du point F par rapport à A et B, il suffit de faire l'angle $AO\omega$ égal à l'angle AOF. Désignons par θ l'angle fixe XOT, et par α l'angle variable AFO : nous avons, dans le triangle $FO\omega$,

$$F\omega O = 2^d - \alpha - 2AOF,$$

et dans le triangle FAO, en observant que le triangle IAO est isoscèle,

$$IAO = \alpha + AOF = IOA = 2^d - \theta - AOF,$$

d'où

$$\theta = 2^d - \alpha - 2AOF = F\omega O;$$

le point ω est donc situé sur le cercle passant par F et O, et tangent à X'X.

J'ai été conduit, par cette étude des propriétés de la strophoïde, à mettre en évidence quelques propriétés de certaines figures ayant entre autres celle de se transformer en elles-mêmes par rayons vecteurs réciproques; bien que leur démonstration ne soit pas aussi indépendante de tout calcul que celle des précédentes, elle est encore assez simple pour être facilement lue par les élèves, et je pourrai en faire l'objet d'un second article.