De la construction du polygone de 17 côtés, d'après M. Schroeter

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 456-468

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__456_1>

DE LA CONSTRUCTION DU POLYGONE DE 17 COTÉS, D'APRÈS M. SCHRŒTER.

(Extrait du *Journal de Crelle*, t. LVII, 1er cahier, traduit de l'allemand par un ABONNÉ.)

Si nous désignons les cosinus des arcs

$$\frac{2\pi}{17},\quad 2\,\frac{2\pi}{17},\quad 3\,\frac{2\pi}{17},\quad 4\,\frac{2\pi}{17},\ldots,\quad 8\,\frac{2\pi}{17}$$

respectivement par

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ldots,\ C_8,$$

nous pourrons, en vertu de la formule

$$2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

et des égalités

$$C_9 = C_8,\quad C_{10} = C_7,\quad C_{11} = C_6,\ldots,\quad C_{16} = C_1,$$

écrire les huit groupes de relations ci-dessous :

$$\begin{array}{ll}
2C_1C_1 = C_2 + 1, & 2C_2C_1 = C_3 + C_1,\\
2C_1C_2 = C_3 + C_1, & 2C_2C_2 = C_4 + 1,\\
2C_1C_3 = C_4 + C_2, & 2C_2C_3 = C_5 + C_1,\\
2C_1C_4 = C_5 + C_3, & 2C_2C_4 = C_6 + C_2,\\
2C_1C_5 = C_6 + C_4, & 2C_2C_5 = C_7 + C_3,\\
2C_1C_6 = C_7 + C_5, & 2C_2C_6 = C_8 + C_4,\\
2C_1C_7 = C_8 + C_6, & 2C_2C_7 = C_8 + C_5,\\
2C_1C_8 = C_8 + C_7; & 2C_2C_8 = C_7 + C_6;
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
2C_3C_1 = C_4 + C_2, & 2C_4C_1 = C_5 + C_3, \\
2C_3C_2 = C_5 + C_1, & 2C_4C_2 = C_6 + C_2, \\
2C_3C_3 = C_6 + 1, & 2C_4C_3 = C_7 + C_1, \\
2C_3C_4 = C_7 + C_1, & 2C_4C_4 = C_8 + 1, \\
2C_3C_5 = C_8 + C_2, & 2C_4C_5 = C_8 + C_1, \\
2C_3C_6 = C_8 + C_3, & 2C_4C_6 = C_7 + C_2, \\
2C_3C_7 = C_7 + C_4, & 2C_4C_7 = C_6 + C_3, \\
2C_3C_8 = C_6 + C_5; & 2C_4C_8 = C_5 + C_4;
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
2C_5C_1 = C_6 + C_4, & 2C_6C_1 = C_7 + C_5, \\
2C_5C_2 = C_7 + C_3, & 2C_6C_2 = C_8 + C_4, \\
2C_5C_3 = C_8 + C_2, & 2C_6C_3 = C_8 + C_3, \\
2C_5C_4 = C_8 + C_1, & 2C_6C_4 = C_7 + C_2, \\
2C_5C_5 = C_7 + 1, & 2C_6C_5 = C_6 + C_1, \\
2C_5C_6 = C_6 + C_1, & 2C_6C_6 = C_5 + 1, \\
2C_5C_7 = C_5 + C_2, & 2C_6C_7 = C_4 + C_1, \\
2C_5C_8 = C_4 + C_3; & 2C_6C_8 = C_3 + C_2;
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
2C_7C_1 = C_8 + C_6, & 2C_8C_1 = C_8 + C_7, \\
2C_7C_2 = C_8 + C_5, & 2C_8C_2 = C_7 + C_6, \\
2C_7C_3 = C_7 + C_4, & 2C_8C_3 = C_6 + C_5, \\
2C_7C_4 = C_6 + C_3, & 2C_8C_4 = C_5 + C_4, \\
2C_7C_5 = C_5 + C_2, & 2C_8C_5 = C_4 + C_3, \\
2C_7C_6 = C_4 + C_1, & 2C_8C_6 = C_3 + C_2, \\
2C_7C_7 = C_3 + 1, & 2C_8C_7 = C_2 + C_1, \\
2C_7C_8 = C_2 + C_1; & 2C_8C_8 = C_1 + 1.
\end{array}$$

Posons

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7 + C_8 = S;$$

il est facile de trouver immédiatement la valeur de S.

En effet, si nous ajoutons, membre à membre, les équations du premier groupe, par exemple, il vient

$$2C_1S = 2S + 1 - C_1,$$

ou bien

$$2S(1 - C_1) = C_1 - 1,$$

d'où

$$S = -\frac{1}{2}.$$

Considérons actuellement les huit groupes ci-dessus et choisissons, dans chacun d'eux, les quatre relations pour lesquelles la somme des seconds membres est égale à S; on arrivera ainsi, en ajoutant membre à membre, aux huit égalités qui suivent :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} 2C_1(C_2 + C_3 + C_6 + C_7) = S, \\ 2C_2(C_3 + C_4 + C_5 + C_6) = S, \\ 2C_3(C_1 + C_4 + C_6 + C_8) = S, \\ 2C_4(C_5 + C_6 + C_7 + C_8) = S, \\ 2C_5(C_1 + C_2 + C_4 + C_7) = S, \\ 2C_6\ C_1 + C_2 + C_5 + C_8) = S, \\ 2C_7(C_2 + C_3 + C_4 + C_8) = S, \\ 2C_8(C_1 + C_3 + C_5 + C_7) = S. \end{array}\right.$$

Si nous extrayons du tableau préliminaire les quatre relations

$$2C_3C_6 = C_3 + C_8,$$
$$2C_5C_7 = C_2 + C_5,$$
$$2C_3C_7 = C_4 + C_7,$$
$$2C_5C_0 = C_1 + C_6,$$

nous trouverons, en ajoutant membre à membre,

$$2(C_3C_6 + C_5C_7 + C_3C_7 + C_5C_6) = S,$$

ou bien

$$2(C_3 + C_5)(C_6 + C_7) = S.$$

Or

$$C_3 + C_5 = 2C_4C_1,$$
$$C_6 + C_7 = C_6 + C_{10} = 2C_2C_8,$$

et, par conséquent,

$$8C_1C_2C_4C_8 = S.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} 2C_1C_2 &= C_1 + C_3, \\ 2C_4C_8 &= C_4 + C_5, \\ 2C_1C_8 &= C_7 + C_8, \\ 2C_2C_4 &= C_2 + C_6, \end{aligned}$$

et, en ajoutant membre à membre,

$$(2)\quad 2(C_1C_2 + C_4C_8 + C_1C_8 + C_2C_4) = 2(C_1 + C_4)(C_2 + C_8) = S;$$

mais

$$\begin{aligned} C_1 + C_4 &= 2C_6C_7, \\ C_2 + C_8 &= 2C_3C_5, \end{aligned}$$

d'où

$$8C_3C_5C_6C_7 = S.$$

Cela posé, extrayons des huit relations (1) les quatre suivantes, que nous écrirons

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} 2C_1(C_3 + C_6 + C_7) + 2C_1C_2 &= S, \\ 2C_2(C_3 + C_5 + C_6) + 2C_2C_4 &= S, \\ 2C_4(C_5 + C_6 + C_7) + 2C_4C_8 &= S, \\ 2C_8(C_3 + C_5 + C_7) + 2C_1C_8 &= S, \end{aligned}\right.$$

et joignons-y

$$(2)\qquad 2C_1C_2 + 2C_2C_4 + 2C_4C_8 + 2C_1C_8 = S.$$

Ajoutons ensuite, membre à membre, les égalités

$$\begin{aligned} 2C_1C_5 &= C_4 + C_6, \\ 2C_2C_7 &= C_8 + C_5, \\ 2C_4C_3 &= C_1 + C_7, \\ 2C_8C_6 &= C_3 + C_2, \end{aligned}$$

il viendra

$$(4)\qquad 2C_1C_5 + 2C_2C_7 + 2C_4C_3 + 2C_8C_6 = S.$$

Ajoutons également les égalités (3), et remplaçons le premier membre de (2) par le premier membre (4), nous aurons

$$2C_1(C_3+C_6+C_7)+2C_2(C_3+C_5+C_6)+2C_4(C_5+C_6+C_7)$$
$$+2C_8(C_2+C_5+C_7)+2(C_1C_5+C_2C_7+C_4C_3+C_8C_6)=4S,$$

ou bien encore

$$(C_1+C_2+C_4+C_8)(C_3+C_5+C_6+C_7)=2S=-1.$$

Posons

$$2(C_1+C_2+C_4+C_8)=x,$$
$$2(C_3+C_5+C_6+C_7)=x_1,$$

et il vient

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} x+x_1=-1,\\ xx_1=-4;\end{array}\right.$$

x et x_1 sont donc les racines de l'équation du second degré

$$X^2+X-4=0.$$

Nous supposerons que x représente la racine positive, et x_1 la racine négative de cette équation.

Ces racines étant trouvées, posons

$$2(C_1+C_4)=y,$$
$$2(C_2+C_8)=y_1,$$

et il vient

$$y+y_1=2(C_1+C_4+C_2+C_8)=x,$$
$$yy_1=4(C_1+C_4)(C_2+C_8)=16C_3C_5C_6C_7=2S=-1;$$

y et y_1 sont donc les racines de l'équation du second degré

$$Y^2-xY-1=0.$$

Nous supposerons que y représente la racine positive et y_1 la racine négative.

Si l'on pose ensuite

$$2(C_3+C_5)=z,$$
$$2(C_6+C_7)=z_1,$$

nous aurons

$$z+z_1=x_1,$$
$$zz_1=-1,$$

et l'équation

$$Z^2 - x_1 Z - 1 = 0$$

admettra les racines z et z_1, z étant la racine positive et z_1 la racine négative.

On pourra, en conséquence, déterminer

$$C_1 \text{ et } C_4, \quad C_3 \text{ et } C_5, \quad C_2 \text{ et } C_8, \quad C_6 \text{ et } C_7.$$

En effet,

$$2(C_1 + C_4) = y \quad \text{et} \quad 2(C_3 + C_5) = 2C_1 . 2C_4 = z;$$

$2C_1$ et $2C_4$ sont donc les racines de l'équation du second degré

$$u^2 - yu + z = 0.$$

Les termes des autres groupes, ci-dessus mentionnés, se trouveront d'une manière analogue; car nous avons

$$2C_3 + 2C_5 = z,$$
$$2C_3 . 2C_5 = y_1,$$

$$2C_2 + 2C_8 = y_1,$$
$$2C_2 . 2C_8 = z,$$

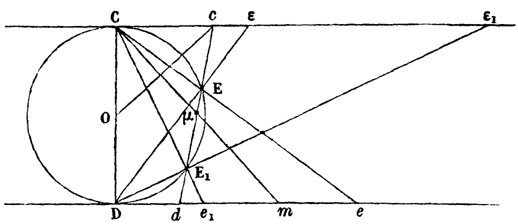
$$2C_6 + 2C_7 = z_1,$$
$$2C_6 . 2C_7 = y.$$

Les huit quantités $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_8$ ne dépendent donc que d'équations du second degré, et, dès lors, la construction du polygone de dix-sept côtés pourra être effectuée au moyen de la ligne droite et du cercle.

Nous allons montrer comment on peut n'employer pour cette construction que le cercle dans lequel il s'agit d'inscrire le polygone, et comment on peut ramener la solution du problème à l'intersection de ce cercle avec certaines droites dont la position est déterminée par les coefficients des équations du second degré établies ci-dessus.

La construction en question repose sur le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit tracé un cercle de rayon* 1, *et, aux extrémités du diamètre* CD, *menons les tangentes* (C) *et* (D) *parallèles entre elles. Prenons un point* c *sur la*



tangente (C) *et menons la transversale* cd *qui rencontre le cercle en* E *et* E_1 ; *joignons* CE *et* CE_1 *qui rencontrent la tangente* (D) *aux points* e *et* e_1. *On aura*

$$De + De_1 = \frac{4}{Cc},$$

$$De \times De_1 = 4\frac{Dd}{Cc}.$$

En effet, menons la corde contact Cm des tangentes issues du point c, ou, en d'autres termes, la polaire du point c ; elle coupera la transversale cd en μ et les quatre points c, E, μ et E_1 seront harmoniques. Considérons, d'ailleurs, le faisceau Cc, CE, $C\mu$, CE_1, il sera coupé par la tangente (D) aux points e, m, e_1, le quatrième point étant à l'infini ; donc le point m est le milieu de ee_1, et l'on aura

$$De + De_1 = 2Dm.$$

D'ailleurs les deux triangles semblables CDm et COc donnent

$$\frac{Dm}{CD} = \frac{CO}{Cc}, \quad \text{ou} \quad Dm = \frac{2}{Cc},$$

et, par conséquent,

$$De + De_1 = \frac{4}{Cc}.$$

D'autre part, si nous menons $C\varepsilon$ et $C\varepsilon_1$, nous aurons évidemment

$$C\varepsilon + C\varepsilon_1 = \frac{4}{Dd}.$$

Mais les triangles semblables CDe et $CD\varepsilon$ donnent

$$\frac{C\varepsilon}{CD} = \frac{CD}{De},$$

ou

$$C\varepsilon = \frac{\overline{CD}^2}{De} = \frac{4}{De}.$$

On aurait de même

$$C\varepsilon_1 = \frac{4}{De_1},$$

d'où

$$C\varepsilon + C\varepsilon_1 = 4\left(\frac{1}{De} + \frac{1}{De_1}\right) = 4\,\frac{De + De_1}{De \times De_1},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{Dd} = \frac{4}{Cc} \times \frac{1}{De \times De_1},$$

ce qui revient à

$$De \times De_1 = 4\,\frac{Dd}{Cc}.$$

Le théorème est donc démontré.

Il résulte de ce théorème que De et De_1 sont les racines d'une équation du second degré, dont les coefficients sont connus. Ils dépendent, en effet, des deux segments Cc et Cd, lesquels sont déterminés par la position de la transversale cd. Ces segments, aussi bien que les longueurs De et De_1 et toutes celles, en un mot, qui seront portées sur les tangentes parallèles (C) et (D) sont susceptibles de prendre des signes. Nous compterons, à partir des points C et D, les longueurs positives de gauche à droite et les longueurs négatives de droite à gauche. Ces préliminaires établis, la solution du problème est des plus faciles.

Reprenons les équations

$$x + x_1 = -1,$$
$$xx_1 = -4,$$

et comparons-les avec

$$De + De_1 = \frac{4}{Cc},$$
$$De \times De_1 = 4\frac{Dd}{Cc}.$$

Pour que De et De_1 représentent les valeurs de x et de x_1, il suffit de prendre $Cc = -4$ et $Dd = +4$.

Nous mènerons, en conséquence, aux extrémités du cercle de rayon 1, deux tangentes (C) et (D). Nous prendrons sur la direction négative de la tangente (C) une longueur Cc égale au double du diamètre et sur la partie positive de la tangente (D) une longueur égale Dd. Nous joindrons cd qui coupera le cercle en E et E_1; puis nous mènerons CE et CE_1 rencontrant la tangente (D) en e et e_1, e étant sur la partie positive et e_1 sur la partie négative de la droite (D).

On aura, d'après cela,

$$De = x = 2(C_1 + C_2 + C_4 + C_8),$$
$$De_1 = x_1 = 2(C_3 + C_5 + C_6 + C_7).$$

Nous avons ensuite

$$y + y_1 = x = De,$$
$$yy_1 = -1.$$

Pour construire y et y_1, joignons DE qui rencontre la tangente (C) en ε. Prenons $Di = 1$ et joignons ic, qui, par son intersection avec CD, détermine le point p; on a

$$\frac{Di}{Cc} = \frac{Dp}{Cp} = \frac{1}{4}.$$

Menons $\varepsilon p \delta$, coupant le cercle en F et F_2; joignons CE et CE_2 qui, prolongés jusqu'à leur rencontre avec la tangente (D), donnent les points f et f_2, le point f étant sur la partie positive, le point f_2 sur la partie négative.

Nous aurons, en vertu du théorème, et en tenant compte des signes,

$$Df + Df_2 = \frac{4}{C\varepsilon},$$

$$Df \times Df_2 = 4\,\frac{D\delta}{C\varepsilon}.$$

Mais les triangles semblables $C\varepsilon D$ et CeD donnent la proportion

$$\frac{C\varepsilon}{CD} = \frac{CD}{De},$$

d'où

$$\frac{4}{C\varepsilon} = De,$$

et, puisque

$$\frac{D\delta}{C\varepsilon} = -\frac{Dp}{Cp} = -\frac{1}{4},$$

nous aurons

$$Df + Df_2 = De, \quad \text{et} \quad Df \times Df_2 = -1;$$

donc

$$Df = y = 2C_1 + 2C_4,$$

$$Df_2 = y_1 = 2C_2 + 2C_8.$$

Menons actuellement DE_1 rencontrant la tangente (C) en ε_1, puis la droite $\varepsilon_1 p \delta_1$ qui coupe la circonférence en

F_1 et F_3; en joignant CF_1 et CF_3, on obtiendra sur la tangente (D) les points f_1 et f_3. Nous aurons, d'après cela, toujours en ayant égard aux signes,

$$Df_1 + Df_3 = \frac{4}{C\varepsilon_1},$$

$$Df_1 \times Df_3 = 4\frac{D\delta_1}{C\varepsilon_1}.$$

Mais

$$\frac{C\varepsilon_1}{CD} = \frac{CD}{De_1}, \quad \text{d'où} \quad \frac{4}{C\varepsilon_1} = De_1,$$

et

$$\frac{D\delta_1}{C\varepsilon_1} = -\frac{1}{4};$$

donc

$$Df_1 = z = 2C_2 + 2C_8,$$

$$Df_3 = z_1 = 2C_6 + 2C_7.$$

Il va être facile maintenant de construire les valeurs formant chacun des groupes

$$2C_1 \text{ et } 2C_4, \quad 2C_3 \text{ et } 2C_5, \quad 2C_2 \text{ et } 2C_8, \quad 2C_6 \text{ et } 2C_7.$$

Occupons-nous du premier.

Nous avons

$$2C_1 + 2C_4 = Df,$$

$$2C_3 + 2C_5 = 2C_1 \times 2C_4 = Df_1.$$

Portons sur la tangente (C), du côté positif, $C\theta = 4$, et joignons θf_1 rencontrant le diamètre CD en q_1; puis menons DF qui rencontre la tangente (D) en φ, puis encore la transversale $\varphi\eta q_1$, qui coupe la tangente (D) en η et la circonférence en H_1 et H_4. Joignons CH_1, CH_4 : ces droites prolongées coupent la tangente (D) en h_1 et h_4; Dh_1 et Dh_4 seront les valeurs de $2C_1$ et $2C_4$.

En effet, d'après le théorème,

$$Dh_1 + Dh_4 = Df,$$

et

$$Dh_1 \times Dh_4 = 4\frac{D\eta}{C\varphi} = 4\frac{Dq_1}{Cq_1} = 4\frac{Df_1}{C\theta} = Df_1;$$

donc

$$2C_1 = Dh_1,$$
$$2C_4 = Dh_4.$$

Pour construire le groupe $2C_3$ et $2C_5$, on partira de

$$2C_3 + 2C_5 = Df_1 \quad \text{et} \quad 2C_2 + 2C_8 = 2C_3 \times 2C_5 = Df_2.$$

On joindra, cette fois, le point θ avec le point f_2; la ligne θf_2 coupe le diamètre CD en q_2. On mènera la droite DF_1 rencontrant la tangente (C) en φ_1, puis la transversale $\varphi_1 q_2 \eta_1$ qui coupe le cercle en H_3 et H_5. On joint CH_3 et CH_5 qui déterminent sur la tangente (D) les points h_3 et h_5; Dh_3 et Dh_5 représentent $2C_3$ et $2C_5$ (*).

Pour construire $2C_2$ et $2C_8$, on partira de

$$2C_2 + 2C_8 = Df_2, \quad \text{et} \quad 2C_6 + 2C_7 = 2C_2 \times 2C_8 = Df_3.$$

On joindra θ avec f_3, θf_3 rencontre CD en q_3; D avec F_2, DF_2 rencontre la tangente C en φ_2; φ_2 avec q_3, $\varphi_2 q_3$ coupera la circonférence aux points H_2 et H_8. On mènera CH_2 et CH_8 qui déterminent sur la tangente D les points h_2 et h_8; Dh_2 et Dh_8 seront les valeurs de $2C_2$ et $2C_8$.

Enfin, pour construire $2C_6$ et $2C_7$, on partira de

$$2C_6 + 2C_7 = Df_3,$$
$$2C_4 + 2C_1 = 2C_6 \times 2C_7 = Df.$$

On joindra θ avec f, θf rencontre CD en q; D avec F_3, DF_2 rencontre la tangente C en φ_3; φ_3 avec q, $\varphi_3 q$ coupera la circonférence aux points H_6 et H_7. On mènera CH_6 et CH_7 qui déterminent sur la tangente D les points h_6 et h_7; Dh_6 et Dh_7 seront les valeurs de $2C_6$ et $2C_7$.

(*) Le lecteur est prié de faire lui-même la figure pour le cas ci-dessus, ainsi que pour les deux derniers.

Ayant mené les transversales

$$Ch_1, Ch_2, Ch_3, \ldots, Ch_6, Ch_7, Ch_8,$$

on mène aussi le diamètre AB perpendiculaire à CD. Les transversales coupent ce diamètre aux points

$$K_1, K_2, K_3, \ldots, K_6, K_7, K_8;$$

$OK_1, OK_2, OK_3, \ldots, OK_6, OK_7, OK_8$ représentent les valeurs respectives de

$$C_1, C_2, C_3, \ldots, C_6, C_7, C_8.$$

Que l'on mène donc, par ces points, des perpendiculaires au diamètre AB, ces perpendiculaires rencontreront la circonférence aux points

$$A_1 A_{16}, \quad A_2 A_{15}, \quad A_3 A_{14}, \quad A_4 A_{13}, \quad A_5 A_{12}, \quad A_6 A_{11}, \quad A_7 A_{10}, \quad A_8 A_9,$$

qui seront, avec le point A, les sommets du polygone régulier de dix-sept côtés.