NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 424-446

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__424_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 94

(voir 1re série, t. IV, p. 260),

PAR M. H. BROCARD.

Discuter complétement la surface du troisième degré

$$zy^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

(TERQUEM.)

La section de la surface par un plan $z = A$ est une conique du genre ellipse si $A > \frac{B^2}{4C}$, du genre hyperbole si $A < \frac{B^2}{4C}$, et une parabole si $A = \frac{B^2}{4C}$.

Transportons la surface de manière que le plan des xy la coupe suivant la parabole en question; son équation deviendra

$$\left(z + \frac{B^2}{4C}\right) y^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

et déplaçons les axes Ox et Oy, de manière que la parabole soit rapportée à son axe et à la tangente à l'extrémité. L'équation de la surface se réduira à

$$z(Rx + T)^2 + y^2 - 2px = 0.$$

Sous cette forme, plus commode pour la discussion, on voit :

1° Que les plans $z = +\gamma$ donnent des ellipses, les plans $z = -\gamma$ des hyperboles; la parabole $y^2 = 2px$ est la limite commune des deux séries de coniques. Le lieu des centres de ces coniques est l'hyperbole

$$x = \frac{p}{zR^2} - \frac{T}{R},$$

située dans le plan $x = 0$;

2° Que la section par les plans $x = A$ est une parabole, et par les plans $y = A$ une courbe du troisième degré qui admet pour asymptotes les droites $x = -\frac{T}{R}$ et $z = 0$, et qui coupe Ox au point $\frac{A^2}{2p}$.

Le plan $z = 0$ est asymptotique à la surface.

Celle-ci peut donc être regardée comme engendrée par la courbe du troisième degré, définie par les deux équations

$$y = A, \quad z = \frac{2px - A^2}{(Rx + T)^2},$$

et qui se déplace en s'appuyant sur les deux paraboles fixes

$$z = 0, \quad y^2 - 2px = 0$$

et

$$x = 0, \quad z = -\frac{y^2}{T^2}.$$

Question 900

(voir 2e série, t. VIII, p. 45);

PAR M. B. LAUNOY.

Une ellipse donnée se meut à l'intérieur d'une parabole fixe donnée, de manière à toucher cette parabole en deux points. Trouver le lieu décrit par le centre de *l'ellipse mobile et l'enveloppe de la droite qui passe par les deux points de contact.*

(Dauplay.)

Les deux courbes étant doublement tangentes, le pôle de la corde de contact est commun aux deux coniques ; il en est de même du diamètre conjugué de cette corde. Soit alors M le pôle de la corde de contact dans une des positions de l'ellipse, O le centre de cette ellipse, et S' le point de rencontre de MO avec la parabole ; la tangente en S' à la parabole sera parallèle à la corde de contact.

Cela étant, je prendrai d'abord pour axe de coordonnées S'O et S'Y, et, si je désigne par α_1 la distance S'O, les équations des deux coniques seront

$$y^2 = 2p'x,$$
$$\frac{(x-\alpha_1)^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0;$$

comme ces deux courbes sont doublement tangentes, on doit pouvoir déterminer k et λ, de manière que l'équation

$$\frac{(x-\alpha_1)^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 + k(y^2 - 2p'x) = 0$$

soit identique à l'équation

$$(x-\lambda)^2 = 0.$$

Il faudra alors que l'on ait

$$\frac{1}{b'^2} + k = 0$$

et

$$a'^2 = \frac{\lambda}{kp' + \frac{\alpha_1}{a'^2}} = \frac{\lambda^2}{\frac{\alpha_1^2}{a'^2} - 1},$$

d'où

(1) $$x = \lambda = \frac{\alpha_1 b'_2 - p' a'^2}{b'^2} = \sqrt{\alpha_1^2 - a'^2},$$

et, par suite,

$$b'^4(\alpha_1^2 - a'^2) = (x_1 b'^2 - p' a'^2)^2,$$

ou

(2) $$p' a'^2 = b'^2(b'^2 - 2p'\alpha_1).$$

Soit $\varphi = \widehat{YS'O}$; on sait qu'on a

$$p' = \frac{p}{\sin^2\varphi} \quad (2p = \text{paramètre de la parabole}),$$

et, comme

$$TS = SP,$$
$$S'P = 2SP \tang\varphi,$$

d'où

$$\frac{\sin\varphi}{S'P} = \frac{\cos\varphi}{2SP} = \frac{1}{\pm\sqrt{\overline{S'P}^2 + 4\overline{SP}^2}};$$

alors

$$p' = p\,\frac{\overline{S'P}^2 + 4\overline{SP}^2}{\overline{S'P}^2} = p\,\frac{2pSP + 4\overline{SP}^2}{2pSP} = p + 2SP.$$

Soient donc α et β les coordonnées du centre de l'ellipse par rapport à l'axe de la parabole et à la tangente au sommet comme axes, on a

$$\alpha = \alpha_1 + SP,$$
$$\beta = S'P = \sqrt{2p \times SP};$$

alors

$$SP = \frac{\beta^2}{2p} = \alpha - \alpha_1,$$

d'où

(3) $$\alpha_1 = \frac{2p\alpha - \beta^2}{2p}$$

et

$$(4)\qquad p' = p + \frac{\beta^2}{p} = \frac{p^2+\beta^2}{p}.$$

De plus, les théorèmes d'Apollonius me donnent les relations

$$(5)\qquad \left\{ \begin{array}{l} a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \\ a'b'\sin\varphi = ab, \end{array} \right.$$

et comme

$$\sin\varphi = \frac{\mathrm{S'P}}{\pm\sqrt{\overline{\mathrm{S'P}}^2 + 4\overline{\mathrm{SP}}^2}} = \frac{\beta}{\pm\sqrt{\beta^2 + \frac{\beta^4}{p^2}}} = \frac{p}{\pm\sqrt{p^2+\beta^2}},$$

il vient

$$(6)\qquad \frac{a'b'p}{\pm\sqrt{p^2+\beta^2}} = ab.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer a', b', p', α_1 entre les équations (2), (3), (4), (5) et (6). Je commence par éliminer a' et b'; pour cela, je pose

$$\sqrt{p^2+\beta^2} = \gamma, \quad \frac{ab}{p} = \mathrm{A}, \quad a^2 + b^2 = \mathrm{B}^2,$$

d'où

$$a' = \frac{ab\sqrt{p^2+\beta^2}}{pb'} = \frac{ab\gamma}{pb'} = \frac{\mathrm{A}\gamma}{b'}.$$

La substitution de cette valeur dans les équations (2) et (5) donne

$$b'^6 - 2p'\alpha_1 b'^4 - p'^2\mathrm{A}^2\gamma^2 = 0,$$
$$b'^4 - \mathrm{B}^2 b'^2 + \mathrm{A}^2\gamma^2 = 0.$$

L'élimination de b'^2 entre ces deux dernières équations donnera

$$\begin{aligned}(\mathrm{B}^2 - 2p'\alpha_1)\big\{ & \mathrm{A}^4\gamma^2[p'^2 + (\mathrm{B}^2 - 2p'\alpha_1)] \\ & - \mathrm{A}^2\gamma^2[\mathrm{B}^2(\mathrm{B}^2 - 2p'\alpha_1) - \mathrm{A}^2\gamma^2] \\ & - p'^2\mathrm{B}^2[\mathrm{B}^2(\mathrm{B}^2 - 2p'\alpha_1) - \mathrm{B}^2\gamma^2]\big\} = 0,\end{aligned}$$

qui donne d'abord

$$B^2 - 2p'\alpha_1 = 0.$$

En égalant à zéro la grande parenthèse, on obtient une seconde équation ; il est facile de voir qu'elle ne convient pas à la question, car elle donne une courbe qui possède des points à l'extérieur de la parabole.

Donc l'équation du lieu est

$$B^2 - 2p'\alpha_1 = 0,$$

ou, en remplaçant B^2, p', α_1 par leurs valeurs,

$$(7) \qquad (p^2 + \beta^2)(2p\alpha - \beta^2) = p^2(a^2 + b^2).$$

La courbe est du quatrième ordre ; elle est symétrique par rapport à l'axe de la parabole, et ne rencontre cet axe qu'en un seul point donné par

$$\alpha' = \frac{a^2 + b^2}{2p}.$$

La courbe ne possède pas de points à gauche de la tangente en α' ; elle a des branches infinies sans asymptotes ; ses éléments tendent, comme ceux de la parabole, à devenir parallèles à l'axe.

Enveloppe de la corde de contact. — Soit R le point où la corde de contact rencontre Ox ; on a

$$SR = TR - TS = S'Q - SP = \frac{\alpha_1 b'^2 - p'a'^2}{b'^2} - SP,$$

$$SR = \frac{\alpha_1 b'^2 - p'a'^2}{b'^2} - \frac{\beta^2}{2p}.$$

La corde de contact dont le coefficient angulaire est $\tang\varphi$, et qui passe par le point R, aura alors pour équation

$$y = \tang\varphi\left[x - \frac{(\alpha_1 b'^2 - p'a'^2)}{b'^2} + \frac{\beta^2}{2p}\right].$$

Dans cette équation, on connaît α_1, p', a', b' : il serait donc possible d'obtenir l'enveloppe de cette droite par la méthode connue; mais, comme les calculs seraient trop compliqués, je vais me contenter de chercher le lieu du point M. J'aurai ainsi une courbe qui sera, par rapport à la parabole donnée, la polaire réciproque de la courbe cherchée; étant donnée l'une, l'autre s'obtient facilement.

Soient x et y les coordonnées du pôle M; on a, d'après une propriété connue de l'ellipse,

$$\mathrm{OQ} \times \mathrm{OM} = a'^2.$$

Or

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{OS}' - \mathrm{S'Q} = \alpha_1 - \frac{(\alpha_1 b'^2 - p'a'^2)}{b'^2} = \frac{p'a'^2}{b'^2},$$

$$\mathrm{OM} = \mathrm{OS}' + \mathrm{S'M} = \alpha_1 + \mathrm{SP} - x = \alpha - x,$$

d'où

$$\mathrm{OQ} \times \mathrm{OM} = \frac{p'a'^2}{b'^2}(\alpha - x) = a'^2,$$

ou

(6) $$p'(\alpha - x) = b'^2$$

Or, d'après l'équation (2),

$$p'^2 a'^2 = b'^2(b'^2 - 2p'\alpha_1),$$

et, à cause de (6),

$$a'^2 = (\alpha - x)(\alpha - x - 2\alpha_1);$$

donc

$$a'^2 + b'^2 = (\alpha - x)(\alpha - x - 2\alpha_1) + p'(\alpha - x),$$

et, par suite,

$$a^2 + b^2 = (\alpha - x)(\alpha - x - 2\alpha_1 + p');$$

mais

$$p' - 2\alpha_1 = \frac{p^2 + \beta^2}{p} - \frac{(2p\alpha - \beta^2)}{p} = \frac{p^2 - 2p\alpha + 2\beta^2}{p},$$

$$p(a^2 + b^2) = (\alpha - x)[2\beta^2 - p(\alpha + x)],$$

et comme $\beta = y$,

$$(7) \qquad p(a^2+b^2) = (\alpha - x)[2y^2 - p(\alpha + x)].$$

Il ne reste plus qu'à éliminer α entre cette dernière équation et l'équation du lieu des centres; de cette dernière on tire

$$\alpha = \frac{\beta^4 + p^2\beta^2 + p^2(a^2+b^2)}{2p(p^2+\beta^2)},$$

$$\alpha = \frac{y^4 + p^2y^2 + p^2(a^2+b^2)}{2p(p^2+y^2)}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (7), on trouve, après réduction,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &(p^2+y^2)^2[3y^4 - 8pxy^2 + 4p^2x^2 - 4p^2(a^2+b^2)] \\ &\qquad + 2p^2(a^2+b^2)(p^2+y^2)y^2 - p^4(a^2+b^2)^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

qui est le lieu du point M.

Question 904

(voir 2e série, t. VIII, p. 46);

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donné un faisceau de surfaces du second degré ayant même intersection, si, par un point A *pris sur une de ces surfaces, on mène une section plane à cette surface, et les demi-diamètres des autres surfaces parallèles à la tangente à la section au point* A, *ainsi que les plans polaires de ce point par rapport à ces surfaces; si l'on prend, à partir du point* A *et dans la direction des normales à ces plans polaires, des troisièmes proportionnelles aux demi-diamètres et aux distances correspondantes des plans polaires aux centres de ces surfaces, les extrémités de ces droites et le centre* *de courbure de la section faite dans la première surface sont en ligne droite.* (L'ABBÉ AOUST.)

Soient

$$(1)\quad \begin{cases} S = A(x-\alpha)^2 + A'(y-\beta)^2 + A''(z-\gamma)^2 \\ \quad + 2B(y-\beta)(z-\gamma) + 2B'(x-\alpha)(z-\gamma) \\ \quad\quad + 2B''(x-\alpha)(y-\beta) - 1 = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} S_1 = A_1(x-\alpha_1)^2 + A'_1(y-\beta_1)^2 + A''_1(z-\gamma_1)^2 \\ \quad + 2B_1(y-\beta_1)(z-\gamma_1) + 2B'_1(x-\alpha_1)(z-\gamma_1) \\ \quad\quad + 2B''_1(x-\alpha_1)(z-y_1) - 1 = 0 \end{cases}$$

les équations de deux surfaces du second degré, et

$$(3)\qquad S_2 = S - kS_1 = 0$$

celle d'une troisième surface quelconque du second degré passant par l'intersection des deux premières.

Les équations des plans polaires d'un point $A(x, y, z)$, par rapport à ces surfaces, sont respectivement

$$(4)\qquad XS'_x + YS'_y + ZS'_z + tS'_t = 0,$$

$$(5)\qquad XS'_{1x} + YS'_{1y} + ZS'_{1z} + tS'_{1t} = 0,$$

$$(6)\qquad \begin{cases} XS'_x + YS'_y + ZS'_z + tS'_t \\ \quad - k(XS'_{1x} + YS'_{1y} + ZS'_{1z} + tS'_{1t}) = 0, \end{cases}$$

t étant une quatrième variable introduite pour rendre les équations homogènes, et qu'après la différentiation on fait égale à 1.

On voit que tous ces plans polaires, quel que soit k, se coupent suivant une même droite, et, par suite, les normales à ces plans, menées par le plan A, sont dans un même plan perpendiculaire à cette droite.

Si le point A est pris sur la surface S_2, le plan polaire relatif à cette surface est le plan tangent en A à S_2 : c'est le cas que nous considérons.

Soient $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}_1$ les distances du point A aux plans polaires des surfaces S et S_1 ; P et P_1 les distances des centres des surfaces à ces mêmes plans, et R le rayon de courbure d'une section plane normale en A, faite dans la surface S_2. On a

$$\mathfrak{P} = \frac{xS'_x + yS'_y + zS'_z + tS'_t}{\sqrt{(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2}}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2}},$$

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{xS'_{1x} + yS'_{1y} + zS'_{1z} + tS'_{1t}}{\sqrt{(S'_{1x})^2 + (S'_{1y})^2 + (S'_{1z})^2}}, \quad P_1 = \frac{1}{\sqrt{(S'_{1x})^2 + (S'_{1y})^2 + (S'_{1z})^2}},$$

d'où, en remarquant que le point A (x, y, z) est situé dans le plan (6),

$$\frac{\mathfrak{P}}{P} = k\frac{\mathfrak{P}_1}{P_1},$$

ou

$$(7) \qquad \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}_1} = k\frac{P}{P_1};$$

mais les perpendiculaires $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}_1$ sont proportionnelles aux cosinus des angles qu'elles font avec le plan (6); car elles sont les projections d'une même droite contenue dans ce plan, la perpendiculaire abaissée du point A sur l'intersection commune des plans polaires; par suite, elles sont proportionnelles aux sinus des angles qu'elles font avec la normale R au plan (6), ou à la surface S_2.

Plus généralement, on peut dire que $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}_1$ sont proportionnelles aux cosinus des angles qu'elles font avec la tangente en A à une section quelconque faite dans la surface S_2 par un plan passant par A : cela résulte de la formule $\cos a = \cos b \cos c$, relative aux triangles sphériques rectangles; mais nous n'avons pas à faire usage ici de cette relation.

On a donc

$$(8) \qquad \frac{\sin \widehat{P, R}}{\sin \widehat{P_1, R}} = k\frac{P}{P_1}.$$

Considérons une section faite dans la surface S_2 par un plan normal mené par le point A, et soit ds l'élément de cette section, pris à partir de A.

Si l'on différentie deux fois de suite l'équation (3), par rapport à ds pris pour variable indépendante, en remarquant que

$$S'_x = \frac{\cos(P, x)}{P}, \quad S'_y = \frac{\cos(P, y)}{P}, \quad S'_z = \frac{\cos(P, z)}{P},$$

$$S'_{1x} = \frac{\cos(P_1, x)}{P_1}, \quad S'_{1y} = \frac{\cos(P_1, y)}{P_1}, \quad S'_{1z} = \frac{\cos(P_1, z)}{P_1},$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\cos(R, x)}{R}, \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\cos(R, y)}{R},$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\cos(R, z)}{R},$$

il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos(P, R)}{PR} \\
&+\left(A\frac{dx^2}{ds^2} + A'\frac{dy^2}{ds^2} + A''\frac{dz^2}{ds^2} + 2B\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} + 2B'\frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds} + 2B''\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right) \\
&-k\frac{\cos(P_1, R)}{P_1 R} \\
&+\left(A_1\frac{dx^2}{ds^2} + A'_1\frac{dy^2}{ds^2} + A''_1\frac{dz^2}{ds^2} + 2B_1\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} + 2B'_1\frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds} + 2B''_1\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right) = 0;
\end{aligned}$$

mais, si l'on désigne par d et d_1 les demi-diamètres des surfaces S et S_1 parallèles à la tangente en A à la section normale faite dans la surface S_2, et par x', y', z' et x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées de leurs extrémités, on a

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x' - \alpha}{d} = \frac{x'_1 - \alpha_1}{d_1},$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{y' - \beta}{d} = \frac{y'_1 - \beta_1}{d_1},$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{z' - \gamma}{d} = \frac{z'_1 - \gamma_1}{d_1}.$$

L'équation précédente devient alors, en vertu des équations (1) et (2) qui sont vérifiées respectivement par les coordonnées x', y', z' et x'_1, y'_1, z'_1,

$$\frac{\cos(P, R)}{PR} + \frac{1}{d^2} - k\left[\frac{\cos(P_1, R)}{P_1 R} + \frac{1}{d_1^2}\right] = 0,$$

ou

$$(9) \quad \frac{1}{d^2} - \frac{k}{d_1^2} + \frac{1}{R}\left[\frac{\cos(P, R)}{P} - k\,\frac{\cos(P_1, R)}{P_1}\right] = 0.$$

Éliminant k entre les équations (8) et (9), il vient

$$\frac{1}{d^2} - \frac{P_1 \sin(P, R)}{P\sin(P_1, R)}\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{R}\left[\frac{\cos(P, R)}{P} - \frac{\sin(P, R)\cos(P_1, R)}{P\sin(P_1, R)}\right] = 0,$$

ou, en multipliant par $P\sin(P_1, R)$,

$$\frac{P}{d^2}\sin(P_1, R) + \frac{1}{R}\sin(P, P_1) = \frac{P}{d_1^2}\sin(P, R).$$

Posons $\frac{d^2}{P} = \Pi$, $\frac{d_1^2}{P_1} = \Pi_1$, et portons ces longueurs Π et Π_1 à partir du point A sur les normales aux plans polaires de S et S_1. Soient ϖ et ϖ_1 leurs extrémités et c le centre de courbure de la section faite dans S_2 par un plan passant par la normale en A.

La relation précédente s'écrit

$$(10) \qquad \frac{\sin(P, P_1)}{R} + \frac{\sin(P_1, R)}{\Pi} = \frac{\sin(P, R)}{\Pi_1},$$

ou

$$\Pi\Pi_1 \sin(P, P_1) + \Pi_1 R\sin(P_1, R) = \Pi R\sin(P, R).$$

Elle exprime que l'aire du triangle $\varpi A c$ est égale à la somme des aires des triangles $\varpi A \varpi_1$ et $\varpi_1 A c$, et, par suite, que les points c, ϖ, ϖ_1 sont en ligne droite. C'est précisément le théorème qu'il fallait démontrer.

Ce théorème donne le moyen de déterminer le centre de courbure d'une section normale de l'une quelconque des surfaces.

La relation (10) peut s'écrire d'une manière plus symétrique

$$(11)\qquad \frac{\sin(P, P_1)}{R} + \frac{\sin(P_1, R)}{\Pi} + \frac{\sin(R, P)}{\Pi_1} = 0.$$

L'angle de deux droites est décrit en allant de la première à la seconde, et deux angles décrits en tournant dans des sens opposés sont de signes contraires.

Nota. — Il est évident que S et S_1 peuvent être deux surfaces quelconques du faisceau.

Question 1021

(voir 2e série, t. X, p. 191);

PAR M. GUÉBHARD,

Étudiant en Médecine.

Un mobile est lancé dans une atmosphère dont la résistance varie comme le cube de la vitesse. Si f est la résistance lorsque le mobile descend sous l'inclinaison α à l'horizon, f_0 quand il se meut horizontalement, et f' quand il monte sous l'inclinaison α, on a

$$\frac{1}{f'} + \frac{1}{f} = \frac{2\cos^3\alpha}{f_0},$$

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{2\sin\alpha(3 - 2\sin^2\alpha)}{g}.$$

(A. WITWORTH.)

Soient k le coefficient de résistance du milieu gazeux; ω l'angle que fait à un instant quelconque t avec l'axe des x positifs la direction de la vitesse $v = \frac{ds}{dt}$, et enfin $R = -\frac{ds}{d\omega}$ le rayon de courbure au point correspondant de la trajectoire. Les composantes tangentielle et normale de la force accélératrice auront respectivement pour expressions

$$\frac{v^2}{R} = g\cos\omega,$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -kv^3 - g\sin\omega.$$

De là les deux équations du mouvement

$$\frac{dv}{dt} = -kv^3 - g\sin\omega,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g\cos\omega}{v}.$$

Il suffit pour éliminer dt de diviser membre à membre et l'on obtient ainsi l'équation différentielle

$$\frac{dv}{d\omega} = \frac{kv^4 + gv\sin\omega}{g\cos\omega}$$

ou

$$\frac{k}{g}d\omega = \cos\omega v^{-4}dv - v^{-3}\sin\omega d\omega.$$

En multipliant les deux membres par $-3\cos^{-4}\omega$, on obtient de part et d'autre des différentielles exactes, et l'intégration est ramenée à une quadrature

$$\cos^{-3}\omega v^{-3} = -3\frac{k}{g}\int\cos^{-4}\omega d\omega = -\frac{k}{g}\frac{\sin\omega(3 - 2\sin^2\omega)}{\cos^3\omega} + C.$$

Si l'on détermine la constante C par la condition que, pour $\omega = 0$, la résistance $-kv^3$ soit égale à f_0, on obtient l'équation

$$\frac{1}{-kv^3} = \frac{\cos^3\omega}{f_0} + \frac{\sin\omega(3 - 2\sin^2\omega)}{g}.$$

Si l'on y fait successivement $\omega = \alpha$, $\omega = -\alpha$, il vient

$$\frac{1}{f'} = \frac{\cos^3\alpha}{f_0} + \frac{\sin\alpha(3-2\sin^2\alpha)}{g},$$

$$\frac{1}{f} = \frac{\cos^3\alpha}{f_0} - \frac{\sin\alpha(3-2\sin^2\alpha)}{g}.$$

De là les relations qu'il fallait démontrer

$$\frac{1}{f'} + \frac{1}{f} = \frac{2\cos^3\alpha}{f_0},$$

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{2\sin\alpha(3-2\sin^2\alpha)}{g}.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1024

(voir 2e série, t. X, p. 192);

PAR M. KOEHLER.

Lieu des centres des coniques qui ont leurs quatre sommets sur quatre droites données. Construire une conique connaissant cinq droites; sur quatre d'entre elles se trouvent les sommets, sur la cinquième le centre.

(LEMOINE.)

Soient A, B, C, D les quatre droites données; (a, b), (a, c), (a, d), (b, c),... les six sommets du quadrilatère complet.

On reconnaît, *a priori*, que le lieu cherché doit passer par ces six sommets, et qu'il doit se composer de trois lignes distinctes, mais de même nature, correspondant aux trois modes de groupement possibles des sommets opposés des coniques. Ces sommets peuvent être en effet, soit sur A et B, C et D, soit sur A et C, B et D, soit enfin sur A et D, B et C.

J'adopte le premier groupement : soit p un point quelconque de la droite C; si l'on joint le sommet (ab) au milieu μ d'une transversale quelconque $\alpha\beta$ menée par ce point entre A et B, qu'on élève en p une perpendiculaire sur $\alpha\beta$, l'intersection h de $(ab)\mu$ et de la perpendiculaire décrira une conique lorsque $\alpha\beta$ tournera autour de p; car il est évident que ph et $(ab)\mu$ sont des rayons correspondants de deux faisceaux homographiques. Cette conique est une hyperbole équilatère passant par les points (a, b) et p; ses asymptotes sont parallèles aux bissectrices des deux angles supplémentaires formés par les droites A, B.

Si maintenant, du point p, on abaisse une perpendiculaire sur D, que par le milieu de cette perpendiculaire on mène D' parallèle à D, les intersections de D' et de l'hyperbole seront les centres de deux coniques satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Lorsque p se déplacera sur la droite C, les hyperboles correspondantes auront toujours leurs asymptotes parallèles aux bissectrices des angles (A, B). Elles passeront toutes par le point (ab) et par un autre point fixe c' sur la droite C. Ce point est tel, que la perpendiculaire à C comprise entre A et B a son milieu en c'; il s'obtient en menant $(bc)\gamma$ qui fait avec C un angle égal à B(bc)C, et en abaissant $\gamma c'$ perpendiculaire sur C.

Il résulte de là que les hyperboles forment un faisceau de coniques ayant quatre points communs (dont deux à l'infini); à chacune d'elles correspond une droite D' parallèle à D, et obtenue comme je l'ai dit plus haut. Le lieu des intersections du faisceau d'hyperboles et du faisceau de droites D' pivotant autour du point à l'infini, sur D, est une courbe du troisième ordre; mais, dans le cas particulier dont il s'agit, elle se réduit à une conique et à la droite de l'infini. En effet, si l'on cherche la droite

D′ correspondant au point P situé à l'infini sur C, on aura une droite à l'infini.

L'hyperbole correspondante se réduit à la droite $(ab)c'$ et à la droite de l'infini : cette dernière appartient donc tout entière à la courbe du troisième ordre. On aura facilement six points de la conique, d'abord les trois (ab), (cd), c', puis trois autres a', b', d' situés respectivement sur A, B, D; a' s'obtient, comme c', en cherchant sur A un point tel, que la perpendiculaire à cette droite comprise entre C et D ait son milieu en ce point.

Les deux autres groupements dont j'ai parlé plus haut conduisent à deux autres coniques qui complètent le lieu géométrique demandé; l'une passe par les points (ac), (bd), l'autre par les points (ad), (bc).

Si l'on donnait pour déterminer une conique les quatre droites A, B, C, D et une cinquième E devant contenir le centre, il faudrait chercher les intersections de E avec les trois coniques dont j'ai indiqué la construction. Le problème admet donc six solutions, et, lorsque les six centres sont déterminés, on voit que les axes correspondants s'obtiennent sans difficulté.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc,

Question 1053

(voir 2ᵉ série, t. X, p 558);

PAR M. E. PELLET.

Trouver une surface (M) *telle, qu'en abaissant d'un point* M *de* (M) *une perpendiculaire* MP *sur un plan* (P), *et menant par* P *une parallèle* PN *à la normale en* M *à* (M), *les droites ainsi obtenues soient normales à une surface.* (RIBAUCOUR.)

Je prends le plan (P) pour plan des xy, et soit

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

l'équation du plan tangent à la surface (M) mené par le point x, y, z de cette surface. Les équations de PN sont

$$\frac{X - x}{\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}} = \frac{Y - y}{\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}} = \frac{Z}{\frac{-1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}},$$

et, pour que ces droites soient normales à une surface, il faut que l'on ait

$$\frac{d\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}}{dy} = \frac{d\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}}{dx} \quad (*),$$

de sorte que $\frac{p\,dx + q\,dy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ est une différentielle exacte, ce qui exige que $p^2 + q^2$ soit une fonction de z. Ainsi

$$(1) \qquad p^2 + q^2 = \varphi(z).$$

Il est facile d'avoir une intégrale *complète* de l'équation aux dérivées partielles (1). Posons

$$(2) \qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha - a = f(z),$$

α et a étant des constantes arbitraires; il viendra

$$\cos\alpha = f'(z)p,$$
$$\sin\alpha = f'(z)q,$$

par suite

$$p^2 + q^2 = \frac{1}{f'(z)^2}.$$

Donc l'équation (2) sera une intégrale complète de l'équation (1) si $f(z)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{1}{f'(z)^2} = \varphi(z).$$

$f(z)$ étant choisi de manière à satisfaire à cette équation,

(*) Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 674.

l'intégrale générale de l'équation (1) s'obtiendra en éliminant α entre les deux équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha - \psi(\alpha) &= f(z),\\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha - \psi'(\alpha) &= 0,\end{aligned}\right.$$

$\psi(\alpha)$ étant une fonction arbitraire de α.

Les sections d'une quelconque de ces surfaces (3) par des plans parallèles au plan des xy donnent en projection sur le plan des xy des courbes parallèles.

La surface (3) peut, quelles que soient les fonctions ψ et f, être engendrée par une courbe située dans un plan qui roule sans glisser sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z. Il est évident que, réciproquement, une telle surface peut être représentée par les équations (3), où f et ψ sont déterminées convenablement.

La proposition à laquelle nous sommes arrivé est susceptible d'une généralisation, et peut s'énoncer ainsi :

Considérons une surface développable (D), et, dans un de ses plans tangents (P), deux courbes (C) et (C_1). Lorsque le plan (P) roule sur la surface (D) sans glisser, les courbes (C) et (C_1) engendrent des surfaces (S) et (S_1) auxquelles le plan (P) est constamment normal en tous les points de son intersection, de sorte que la courbe (C) dans toutes ses positions est une ligne de courbure de (S) et (C_1) de (S_1) (*). Cela posé, par un point M de (S) élevons la normale à cette surface, et soit M_1 son intersection avec (S_1). Menons par le point M une parallèle MN à la normale en M_1 à (S_1); les droites ainsi obtenues sont normales à une surface.

En effet, la normale à (S_1) menée par le point M est située dans le plan (P) qui correspond à ce point M; la normale en M_1 à (S_1) est située dans ce même plan,

(*) BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 725.

et, si l'on fait varier M sur la courbe (C) correspondant à la position considérée du plan (P), les droites MN admettront un système de trajectoires orthogonales. Soit C_2 l'une d'elles. Elle décrit dans le mouvement du plan (P) une surface (S_2) qui est évidemment normale à toutes les droites MN.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1085

(voir 2e série, t. XI, p 288);

PAR M. H. D.

Un point matériel se meut sur une courbe quelconque, et la force accélératrice est dirigée constamment vers le centre de courbure de sa développée; l'aire parcourue par son rayon de courbure est proportionnelle au temps. Examiner le cas où le point se meut sur une développante de cercle. (N. NICOLAÏDÈS.)

Soient ρ, ρ' les rayons de courbure de la trajectoire et de sa développée, v la vitesse du mobile M; ds, ds' les arcs MM′, CC′, qui se correspondent sur les deux courbes. La force accélératrice étant dirigée vers le centre de courbure de la développée, le rayon de courbure ρ s'enroule sur cette courbe, et l'on a

$$ds' = -d\rho.$$

D'autre part, l'hypothèse faite dans l'énoncé signifie que le rapport des composantes tangentielle et normale de la force accélératrice est égal au rapport des rayons de courbure de la développée et de la trajectoire. On a donc

$$\frac{dv}{dt} : \frac{v^2}{\rho} = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{ds'}{ds} = -\frac{\frac{d\rho}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = -\frac{1}{v}\frac{d\rho}{dt},$$

d'où

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

d'où

$$v\rho = k. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si l'on désigne par $d\Lambda$ l'accroissement OMM' de l'aire décrite par la droite MO, suivant laquelle est dirigée la force accélératrice; par $d\lambda$, $d\lambda'$ les aires élémentaires correspondantes décrites par les rayons de courbure de la trajectoire et de la développée, par $d\tau$ l'accroissement de l'aire du triangle MCO, on a évidemment, dans le cas général,

$$d\Lambda - (d\lambda + d\lambda') = -d\tau,$$

ou

$$d\Lambda - d\lambda = d\lambda' - d\tau.$$

Or, dans le cas de la développante de cercle, on voit facilement que

$$d\lambda' = d\tau;$$

donc

$$d\Lambda = d\lambda,$$

c'est-à-dire que *l'aire décrite par le rayon de courbure de la développante de cercle est égale à l'aire décrite par le rayon vecteur du mobile relatif au centre du cercle.*

Or celle-ci est évidemment proportionnelle au temps, puisque la force accélératrice passe par un point fixe : il devait donc en être de même de la première.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1122

(voir 2ᵉ série, t. XII, p. 528);

PAR M. E. DEWULF.

Le lieu des sommets des paraboloïdes hyperboliques passant par deux droites non dans un même plan est *un conoïde droit; chercher ses sections par des plans parallèles à son axe.* (A. DE SAINT-GERMAIN.)

Un quelconque des paraboloïdes qui satisfont à la question est déterminé si l'on se donne le second plan directeur; et, pour les obtenir tous, il suffit de donner à ce plan toutes les positions possibles dans l'espace.

Soient A_1, A_2 les deux droites données dans l'espace; α le plan parallèle à ces droites. Soient β le second plan directeur, X son intersection avec α : menons un plan perpendiculaire à X, il coupera α suivant a et β suivant b.

On obtiendra le sommet du paraboloïde $[A_1, A_2, \beta]$, en cherchant la droite b_n parallèle à b, qui s'appuie sur les directrices A_1 et A_2, puis la droite a_n parallèle à a, qui s'appuie sur deux des génératrices du paraboloïde, et en prenant l'intersection de ces droites a_n et b_n.

Supposons d'abord que le plan β tourne autour de X, la droite a restera fixe, la droite b décrira le plan perpendiculaire à X. Chacune des positions de β détermine un paraboloïde et une droite b_n; ces droites b_n, toutes parallèles au plan (ab) et s'appuyant sur A_1 et A_2, engendrent un paraboloïde isoscèle P. Tous les paraboloïdes qui correspondent aux positions de β, tournant autour de X, forment un faisceau dont la base se compose de A_1, A_2 et de la droite à l'infini qui s'appuie sur ces deux droites, et est parallèle à X; les droites a_n dans chacun de ces paraboloïdes s'appuient toujours sur cette droite de l'infini, et, comme elles sont toutes parallèles à la direction fixe a, elles engendrent un plan parallèle au plan (Xa) ou α. Or ce plan coupe le paraboloïde P suivant une directrice a_n; donc les sommets de tous les paraboloïdes qui correspondent aux positions du plan β, qui passent par X, sont sur une génératrice du paraboloïde P.

Imaginons maintenant que a tourne, dans le plan α, autour de son point d'intersection avec X; chacune des positions de a détermine un faisceau de paraboloïdes satisfaisant à la question et un paraboloïde isoscèle P. Tous ces paraboloïdes isoscèles P ont une génératrice commune, celle qui est parallèle à la commune intersection des plans (ab), c'est-à-dire la perpendiculaire commune à A_1 et A_2, que je désigne par $p_1 p_2$. Les directrices a_n des paraboloïdes P s'appuient toutes sur $p_1\, p_2$ et sont parallèles au plan α : elles engendrent donc un conoïde droit, qui est le lieu cherché.

On peut dire que ce conoïde est le lieu des intersections des surfaces correspondantes de deux faisceaux homographiques : le faisceau des paraboloïdes P et un faisceau de plans parallèles à α; ce conoïde est donc du troisième degré; et, par suite, les sections par des plans parallèles à son axe sont des courbes du troisième degré.

Le théorème de M. de Saint-Germain renferme, comme cas particulier, cet autre théorème élégant : *Le lieu des sommets des paraboloïdes isoscèles qui passent par deux droites quelconques* A_1, A_2 *est la perpendiculaire commune à* A_1 *et à* A_2.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc et M. B. Launoy.