Nouvelles annales de mathématiques

CROSNIER

Solution de la question de licence proposée au concours d'agrégation de 1873

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 417-424
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__417_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE LICENCE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1873;

PAR M. CROSNIER.

Déterminer les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique quelconque. On examinera en particulier le cas où le paraboloïde est équilatère.

I. *Solution géométrique.* — Prenons l'un des systèmes de génératrices et le plan directeur correspondant; il est évident que les trajectoires orthogonales de ce système se projettent sur le plan directeur suivant les trajectoires orthogonales des projections sur ce plan des génératrices.

Mais on sait que les trajectoires orthogonales d'un système de droites comprises dans un même plan sont les développantes de l'enveloppe des droites du système. Or l'enveloppe des projections des génératrices d'un paraboloïde sur le plan directeur est une parabole; car, si A et B sont les traces de deux directrices sur le plan en question, la projection d'une génératrice intercepte sur les projections des directrices, et à partir des points A et B des segments proportionnels; elle enveloppe, par suite, une conique, puisqu'elle détermine deux divisions homographiques sur deux droites; la conique est d'ailleurs une parabole, car elle est tangente à la droite de l'infini.

Ainsi les projections des trajectoires sont des développantes de parabole.

Cette parabole est d'ailleurs évidemment la projection de la ligne de striction relative au système de génératrices que nous considérons.

Si le paraboloïde est équilatère, toutes les génératrices d'un même système rencontrent la génératrice de l'autre système qui passe au sommet de la surface; cette génératrice étant normale au plan directeur, les projections des génératrices de l'autre système sur ce plan directeur passent par un même point, et les trajectoires orthogonales de ces projections sont des cercles ayant le point pour centre commun.

II. *Solution analytique.* — Prenons le plan directeur correspondant au système de génératrices que nous considérons pour plan des xy, l'axe de la surface pour axe des x, et la génératrice contenue dans le plan directeur pour axe des y, l'axe des z étant une perpendiculaire à ce plan; l'équation de la surface sera

$$(1) \qquad z(\mathrm{A}y + \mathrm{B}z) = x.$$

Les génératrices parallèles au plan des xy ont pour équations

$$(2) \qquad \begin{cases} z = \lambda, \\ x = \lambda(\mathrm{A}y + \mathrm{B}\lambda). \end{cases}$$

Désignons par α, β, γ les angles d'une génératrice avec les axes coordonnés. Soient (x, y, z) un point de la génératrice, dx, dy, dz les accroissements de coordonnées relatifs à la trajectoire orthogonale qui passe en ce point; on a

$$(3) \qquad \cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0;$$

mais

$$\gamma = 90^\circ,$$

par suite

$$\cos\gamma = 0,$$

et l'équation se réduit à

$$(4) \qquad \cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy = 0.$$

Cette équation n'est pas autre chose que la condition à laquelle doivent satisfaire les trajectoires des projections des génératrices de la surface sur le plan directeur. Or on a

$$\frac{\cos\alpha}{\lambda\mathrm{A}} = \frac{\cos\beta}{1}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{A}\lambda\, dx + dy = 0.$$

Éliminons λ entre cette dernière équation et l'équation de la projection de la génératrice sur le plan des xy, et nous avons

$$(5) \qquad x + y\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

pour équation différentielle.

Supposons en premier lieu le paraboloïde équilatère, on a $B = o$, et l'équation se réduit à $x + y\frac{dy}{dx} = o$, dont l'intégrale est $x^2 + y^2 = c$; les projections des trajectoires sur le plan directeur sont donc des cercles concentriques dont le sommet est le centre.

Revenons au cas général, et posons, pour abréger,

$$\frac{B}{A^2} = a, \quad \frac{dy}{dx} = p;$$

nous avons à intégrer l'équation

$$(6) \qquad x + py = ap^2,$$

équation du genre

$$xf(p) + y\varphi(p) = \psi(p),$$

que l'on intègre en différentiant; on a

$$1 + p^2 + y\frac{dp}{dx} = 2ap\frac{dp}{dx},$$

ou bien, puisque

$$\frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

on a, en remplaçant,

$$(7) \qquad 1 + p^2 + py\frac{dp}{dy} = 2ap^2\frac{dp}{dy}.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(8) \qquad \frac{dy}{dp} + y\frac{p}{1+p^2} = 2a\frac{p^2}{1+p^2}.$$

Elle est linéaire; nous avons donc

$$y = e^{-\int P dp}\int Q e^{\int P dp} dp,$$

en posant

$$P = \frac{p}{1+p^2} \quad \text{et} \quad Q = 2a\frac{p^2}{1+p^2};$$

par conséquent,

$$\int \mathrm{P}\,dp = \int \frac{p\,dp}{1+p^2} = \frac{1}{2}\log(1+p^2),$$

et, par suite,

$$e^{-\int \mathrm{P}dp} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

et

$$\mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}dp}dp = 2a\,\frac{p^2}{1+p^2}\sqrt{1+p^2}\,dp = \frac{2ap^2dp}{\sqrt{1+p^2}};$$

donc

$$\int \mathrm{Q}\,e^{\int \mathrm{P}dp}dp = 2a\int\frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^3}} + c;$$

or

$$\int\frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int p\,\frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = p\sqrt{1+p^2} - \int dp\sqrt{1+p^2}$$

$$= p\sqrt{1+p^2} - \int\frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}} - \int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

d'où

$$2\int\frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}} = p\sqrt{1+p^2} - \log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right).$$

Remplaçons, nous avons

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left[ap\sqrt{1+p^2} - a\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) + c\right],$$

ou bien

$$(9)\quad y = ap + \frac{c}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right).$$

Si maintenant, entre cette équation et l'équation (6), nous éliminons p, nous aurons l'équation générale des trajectoires demandées.

Si nous faisons $a = 0$, nous trouvons les équations des cercles.

Sur l'équation différentielle (6), nous voyons que par chaque point du plan passent deux tangentes qui se coupent en ce point; car, pour tout système de valeurs de x, y, nous avons deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$. Ces valeurs sont réelles si l'on a

$$y^2 + 4ax \gtrless 0;$$

elles sont égales pour $y^2 + 4ax = 0$, et imaginaires pour $y^2 + 4ax < 0$. La courbe $y^2 + 4ax = 0$ est donc une courbe qui sépare les points du plan par lesquels passent des trajectoires réelles, et ceux par lesquels il n'en passe pas. C'est, par suite, une espèce d'enveloppe de ces trajectoires, mais non une enveloppe proprement dite; car l'enveloppe a pour coefficient angulaire de la tangente $\frac{2a}{y}$, tandis que l'enveloppée a pour coefficient angulaire $\frac{y}{2a}$; les deux tangentes sont par suite à angle droit.

On aurait pu obtenir une autre intégrale à la place de (9), en mettant (6) sous la forme

$$y = -\frac{x}{p} + ap$$

et différentiant : le résultat n'est pas du reste plus simple que (9); on trouve

$$(9') \qquad x = \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} \log c \left(p + \sqrt{1 + p^2}\right).$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey, V. Hioux et Bourguet.

Solution analytique de M. BOURGUET.

Je prends pour axes l'axe de la surface et les deux génératrices du sommet; l'équation de la surface sera

$$(1) \qquad xy = Pz;$$

les équations d'une génératrice et d'un plan perpendiculaire à cette génératrice,

$$y = h, \quad x = \frac{P}{h} z, \quad Px + hz + P\cos\theta y = 0$$

(θ est l'angle des deux génératrices du sommet). L'élément ds de la trajectoire perpendiculaire à la génératrice devra satisfaire à l'équation

$$P\,dx + h\,dz + P\cos\theta\,dy = 0,$$

ou

$$(2) \qquad P\,dx + y\,dz + P\cos\theta\,dy = 0,$$

ou, en éliminant y entre (1) et (2),

$$(3) \qquad x\,dx + z\,dz + Px\cos\theta\,d\frac{z}{x} = 0,$$

et, en prenant les coordonnées polaires,

$$(4) \qquad r\left(dz - P\cos\theta\frac{d\omega}{\sin\omega}\right) = 0,$$

d'où

$$r = 0 \quad \text{(sol. singulière)}$$

et

$$r = r_0 + P\cos\theta\log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} \quad \text{(int. générale)}.$$

Les trajectoires se projettent suivant des limaçons de $r = P\cos\log\theta\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}$, courbe qui a la forme d'une toupie, dont la pointe infiniment allongée est asymptote à l'axe de la surface. Si $\cos\theta = 0$, les trajectoires se projettent orthogonalement sur le plan directeur correspondant suivant des cercles concentriques.