NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. MALEYX

Quelques théorèmes de géométrie, suivis d'une étude géométrique des propriétés de la strophoïde

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 404-417

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__404_1>

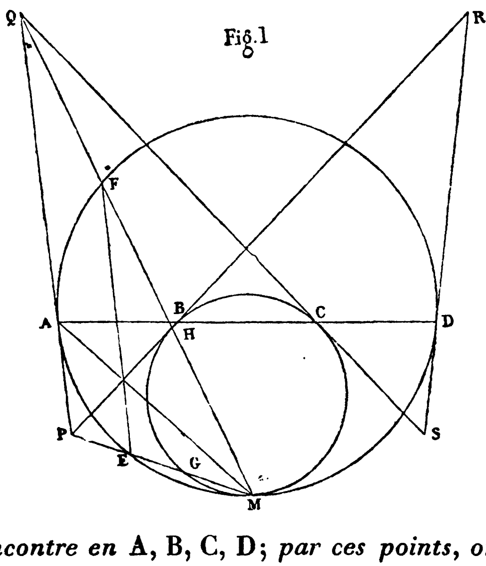
QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE,

suivis d'une Étude géométrique des propriétés de la strophoïde;

PAR M. L. MALEYX.

Théorème I. — *Deux cercles étant tangents en* M (*fig.* 1), *on les coupe par une sécante quelconque qui*

Fig. 1



les rencontre en A, B, C, D; *par ces points, on mène des tangentes aux cercles sur lesquels ils se trouvent;*

les tangentes à deux cercles différents se coupent en quatre points P, Q, R, S. *On joint le point de contact* M *des deux cercles au point de contact* A *de l'une des tangentes, et aux points de rencontre de cette droite avec les deux tangentes à l'autre cercle,* P *et* Q. *La première de ces droites* MA *divise en deux parties égales l'angle des deux autres.*

Les deux triangles PAB, ACQ ont l'angle B égal à l'angle C, les angles en A supplémentaires; les côtés opposés à l'angle égal et à l'angle supplémentaire sont proportionnels; donc

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QC}.$$

Élevant au carré

$$\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} = \frac{\overline{QA}^2}{\overline{QC}^2},$$

ou, d'après un théorème connu,

$$\frac{PE \times PM}{PG \times PM} = \frac{QF \times QM}{QH \times QM}.$$

Simplifiant

$$\frac{PE}{PG} = \frac{QF}{QH},$$

on en déduit

$$\frac{PE}{EG} = \frac{QF}{FH}.$$

Mais le point M étant centre de similitude des deux cercles, on a la proportion

$$\frac{ME}{EG} = \frac{MF}{FH}.$$

Comparant cette égalité avec la précédente, on en conclut

$$\frac{PE}{ME} = \frac{QF}{MF}.$$

La droite EF est donc parallèle à PQ; il en résulte que l'arc EA = AF, et que l'angle PMA = AMQ.

C. Q. F. D.

Remarque. — Les deux triangles ACQ, BDR sont semblables : leurs angles en A et en D sont égaux, comme ayant même mesure; il en est de même de leurs angles en B et C; il en résulte que leurs angles en R et Q sont égaux, et qu'en conséquence le quadrilatère PQRS est inscriptible. Nous avons vu, dans la démonstration du théorème précédent, qu'on a les proportions

$$\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QC},\quad \frac{SD}{SC}=\frac{RD}{RB};$$

mais, à cause de la similitude des deux triangles ACQ, BDR, on a

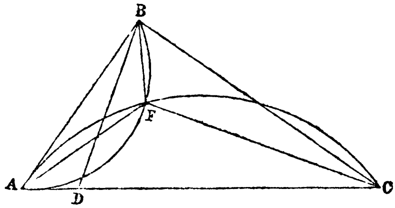
$$\frac{QA}{QC}=\frac{RD}{RB}.$$

Il en résulte que les quatre points P, Q, R, S appartiennent au lieu géométrique des points d'où l'on peut mener aux deux cercles deux tangentes dans un même rapport $\frac{PA}{PB}$; le cercle circonscrit au quadrilatère PQRS a donc, d'après un théorème connu, même axe radical que les deux premiers, et, en conséquence, leur est tangent en M.

Théorème II. — *Le lieu géométrique des foyers des paraboles tangentes à la droite* AB *en* B (*fig.* 2) *et à la droite* AC *en un point indéterminé est la circonférence tangente à* AC *en* A *et passant par le point* B.

En effet, le lieu des foyers des paraboles tangentes aux droites AB, AC, BD est le cercle circonscrit au triangle ABD; si, A et B restant fixes, AD décroît indéfiniment, ce cercle a pour limite le lieu cherché; car alors le point de contact de la parabole variable avec AB a pour position limite B. Or la limite du cercle circonscrit à ABD

Fig. 2.



est le cercle tangent à AC en A et passant par le point B, ce qui justifie l'énoncé.

Corollaire I. — Le foyer F de la parabole tangente à AB et AC, en B et C respectivement, est le second point commun de deux cercles, le premier tangent à AC en A et passant par B, le second tangent à AB en A et passant par C.

Corollaire II. — Les triangles AFB, AFC sont semblables, car les angles ACF, BAF sont égaux comme ayant même mesure, et il en est de même des angles CAF, ABF; donc leurs côtés homologues sont proportionnels :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CF}{AF} = \frac{AF}{BF};$$

d'où, en particulier,

$$\overline{AF}^2 = CF \times BF.$$

Le carré de la droite qui unit le point de concours de deux tangentes à une parabole au foyer est égal au produit des rayons vecteurs allant du foyer aux points de contact.

Le carré du premier rapport est égal au produit des deux derniers; d'où

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{CF}{BF}.$$

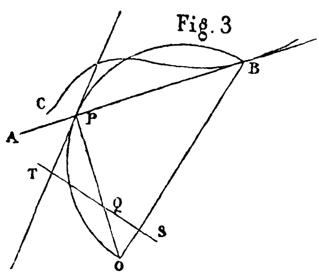
Les carrés des tangentes menées d'un point à une parabole sont proportionnels aux rayons vecteurs des points de contact.

Corollaire III. — Les angles AFB, AFC sont égaux et respectivement supplémentaires de l'angle BAC; donc les segments de deux tangentes menées d'un point à une parabole, et comptés entre leur point commun et les points de contact, sont vus du foyer sous un même angle supplémentaire de l'angle des tangentes.

Théorème III. — *Deux courbes polaires réciproques par rapport à un cercle sont chacune transformées par rayons vecteurs réciproques d'une podaire de l'autre, le pôle de transformation étant le centre du cercle directeur, et la puissance de transformation le carré de son rayon.*

Soient C une courbe quelconque (*fig.* 3), AB une de ses tangentes en un point quelconque B; si du point O, fixe

Fig. 3



dans le plan de la courbe C, nous abaissons une perpendiculaire sur la tangente variable AB, le lieu du point P sera une podaire de la courbe C. La tangente à cette podaire en P sera également tangente à la demi-circonférence décrite sur OB comme diamètre, et fera avec PO l'angle TPO égal à PBO. Si, maintenant, nous considérons le point O comme le centre d'un cercle directeur dont le rayon soit R, le pôle de la droite AB, par rapport à ce cercle, se trouve sur la perpendiculaire OP abaissée du point O sur AB, et en un point Q tel qu'on ait l'égalité

$$OP \times OQ = R^2;$$

donc le lieu du pôle de la tangente AB satisfait à la condition de transformation par rayons vecteurs réciproques conforme à l'énoncé. La tangente TQS au lieu du point Q, en Q, fait avec OQ l'angle OQS égal à l'angle TPO (d'après les propriétés de la transformation par rayons vecteurs réciproques), et, en conséquence, à l'angle PBO; donc le quadrilatère PBSQ est inscriptible, son angle en S est droit, et l'on a les égalités

$$R^2 = OP \times OQ = OS \times OB.$$

Le point B est donc le pôle de la tangente au lieu du point Q, en Q, et le lieu C du point B est transformé par rayons vecteurs réciproques du lieu du point S, qui est une podaire de celui du point Q, la transformation se faisant conformément à l'énoncé.

Remarque. — Les rayons dirigés du point O vers les pôles B, Q des tangentes QS, AB, qui sont leurs polaires respectives, font, avec ces droites BA, QS, des angles égaux.

Corollaire I. — La courbe polaire réciproque d'une courbe du second degré, par rapport à un cercle dont le centre est l'un de ses foyers, est un cercle; le foyer est situé dans l'intérieur de la circonférence transformée, sur cette ligne, ou extérieur, suivant que la courbe du second degré est une ellipse, une parabole ou une hyperbole. Le centre de cette circonférence est toujours situé sur l'axe focal de la courbe.

Corollaire II. — La transformée par rayons vecteurs réciproques d'une courbe du second degré, en prenant le foyer pour pôle, est un limaçon de Pascal dont le point double est au foyer, et réciproquement.

THÉORÈME IV. — *Si, d'un point extérieur à deux paraboles homofocales, on mène deux tangentes à chacune de ces courbes, chacune de ces tangentes divise en parties égales l'un des angles formés par les droites qui unissent son point de contact avec les points de contact situés sur la parabole où il ne se trouve pas.*

Soient deux paraboles p, p_1 ayant pour foyer commun le point F, et leurs axes en coïncidence; menons-leur des tangentes d'un point P, désignons par A et B les points de contact des tangentes à la parabole p, et par A_1 et B_1 les points de contact des tangentes à la parabole p_1. Unissons deux à deux les points de contact pris sur des paraboles différentes par les droites AA_1, AB_1, BA_1, BB_1; il s'agit de démontrer que l'une des tangentes PA, par exemple, divise en deux parties égales l'un des angles formés par les droites AA_1, AB_1.

Formons la figure polaire réciproque de celle que nous venons de considérer par rapport à un cercle dont le centre soit en F; les courbes polaires réciproques des deux paraboles p, p_1 sont deux cercles C, C_1, ayant leurs centres sur l'axe commun des deux paraboles, et passant tous les deux par le foyer F où ils sont tangents (TH. III, *Coroll. I*). Les quatre tangentes PA, PB, PA_1, PB_1 ont leurs pôles respectifs aux points d'intersection α, β, α_1, β_1 des cercles C et C_1 avec la polaire π du point P. Les polaires des points A, B, A_1, B_1 sont respectivement les tangentes au cercle C en α et β, et au cercle C_1 en α_1 et β_1. Nous désignerons le pôle de la droite AA_1, intersection des polaires des points A et A_1, par λ, et respectivement par μ, ν, ρ les pôles des droites AB_1, BA_1, BB_1.

α est le point de contact d'une tangente au cercle C;

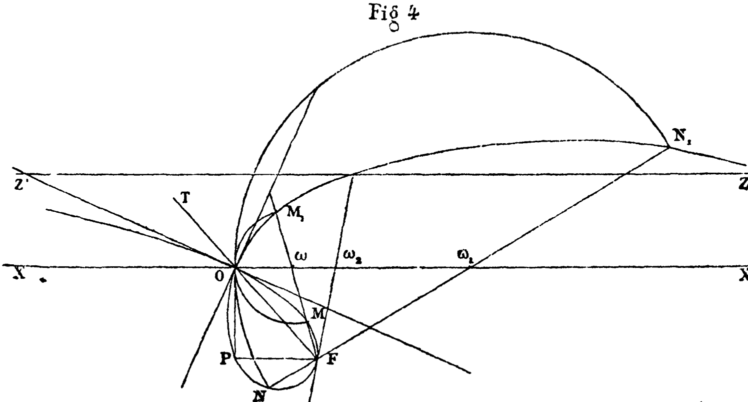
λ, μ sont les points de rencontre de cette tangente avec les tangentes au cercle C_1, menées en α_1 et β_1; donc, d'après le théorème I, la droite $F\alpha$ est bissectrice de l'un des angles formés par $F\alpha_1$, $F\beta_1$; donc encore PA, perpendiculaire à $F\alpha$, est bissectrice de l'un des angles formés par AA_1, BB_1, respectivement perpendiculaires à $F\alpha_1$, $F\beta_1$. C. Q. F. D.

Remarque. — Les pôles λ, μ, ν, ρ des droites AA_1, AB_1, BA_1, BB_1 sont, d'après la remarque du théorème I, situés sur un cercle tangent aux cercles C et C_1 en F; donc ces quatre droites sont tangentes à une même parabole homofocale avec les paraboles p et p_1.

Définition de la strophoïde; diverses constructions par points; propriétés.

On donne une droite illimitée X'X (*fig.* 4), et sur cette droite un point fixe O, on donne encore un point exté-

Fig. 4

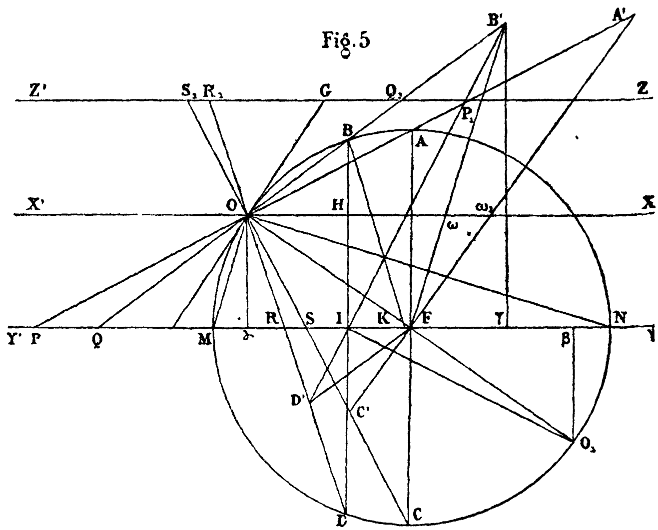


rieur F; par le point F, on mène la sécante arbitraire $F\omega$ à OX, et, à partir du point ω, on porte sur cette sécante, dans les deux sens, la longueur $O\omega$, de sorte que $O\omega = \omega M_1 = \omega M$; le lieu géométrique des points M, M_1 porte le nom de *strophoïde*. On peut construire la courbe par points, en prenant les intersections d'une sécante, telle que $F\omega$, avec un cercle décrit de ω comme centre avec $O\omega$ comme rayon. Les points du lieu se déterminent ainsi par couples situés sur deux rayons rectangulaires issus du point O; les deux points ainsi obtenus sont équidistants de la droite OX. Si la droite $F\omega$ se rapproche de FO, les deux points M, M_1 se rapprochent indéfiniment du point O; on obtient ainsi deux arcs de courbe se coupant en O, qui se trouve ainsi point double du lieu. Les rayons rectangulaires OM, OM_1, constamment parallèles aux bissectrices des angles $F\omega X$, $X\omega M_1$, ont pour directions limites les bissectrices des angles FOX, XOT : ces bissectrices sont les tangentes au point double. Si le point ω_1 s'éloigne du point O et s'en éloigne indéfiniment, l'un des points vient se placer sur une parallèle à OX menée par le point F, à sa rencontre avec un cercle dont le centre est à l'infini sur OX, pendant que sa circonférence passe en O, c'est-à-dire à sa rencontre avec la perpendiculaire à OX en O : on obtient ainsi le point P. Le point situé avec P sur une sécante passant par le point F s'éloigne à l'infini; mais, comme ces deux points sont situés de part et d'autre de OX et en sont équidistants, il en résulte que la courbe admet pour asymptote la droite Z'Z parallèle à OX, et située à la même distance de cette droite que le point F.

On voit facilement que le point F fait partie du lieu, quand le point ω vient se placer à la rencontre de OX avec la perpendiculaire au milieu de FO; si nous désignons ce point par ω_2, $F\omega_2$ sera tangente à la strophoïde en F, et son prolongement coupera la courbe sur l'asymptote. On voit ainsi que toutes les droites passant en F coupent la courbe en trois points. Tels sont les faits généraux et simples qui se déduisent de cette définition et de la construction qui en résulte; mais nous allons envisager d'autres constructions conduisant à des résultats nouveaux.

Soient toujours (*fig.* 5) X'X la droite fixe, O le point double, F le point extérieur par lequel on mène les sécantes.

Fig. 5



Décrivons du point F comme centre une circonférence ayant OF pour rayon, nous lui donnerons le nom de *circonférence de construction*; menons encore par le point F la droite Y'Y parallèle à X'X, et la parallèle équidistante Z'Z qui sert d'asymptote à la strophoïde, comme nous l'avons déjà vu et comme nous le verrons encore par d'autres moyens. Soit B' un point du lieu situé sur le rayon Fω, le triangle OωB' doit être isoscèle; si nous prolongeons B'O jusqu'à sa rencontre en Q avec Y'Y, le triangle QFB' doit être isoscèle aussi ; donc la perpendiculaire abaissée du point F sur la base QB', et dont le pied est au milieu de OB, divise QB' en deux parties égales; il en résulte que $BB' = OQ$, et, comme $OQ = OQ_1$, $BB' = OQ_1$; retranchant la partie commune BQ_1, il reste l'égalité

$$OB = Q_1B'.$$

Donc, pour obtenir un point du lieu, il suffit de mener par le point double une sécante commune au cercle de construction et à l'asymptote, et de prolonger la sécante à l'asymptote d'une longueur égale à la corde interceptée dans le cercle, cette corde étant affectée du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est comptée dans le sens de la sécante à l'asymptote ou en sens contraire.

On voit facilement, d'après cette construction, qu'un point de la strophoïde et le point du cercle de construction situé avec lui sur un même rayon issu du point double sont placés à la même distance, le premier, de la droite $Z'Z$, le second, de la droite $X'X$; de plus, ils sont toujours placés du même côté par rapport à ces droites respectives.

Il en résulte immédiatement que $Z'Z$ est asymptote; que la strophoïde coupe son asymptote au point G où cette ligne est coupée par la tangente au cercle de construction en O; que, comme le cercle de construction ne peut être coupé par une parallèle à $X'X$ en plus de deux points, il en est de même de la strophoïde; que les points de la strophoïde les plus écartés de l'asymptote sont situés sur les rayons rectangulaires joignant le point O aux extrémités A, C du diamètre du cercle de construction perpendiculaire à $X'X$; que, comme il n'existe sur chaque rayon issu de O qu'un seul point de la courbe, et que, comme, d'après la première construction, il existe sur deux rayons rectangulaires issus de O deux points de la courbe en ligne droite avec le point F, les points A′ et C′, qui sont les points de la courbe les plus éloignés de l'asymptote, sont en ligne droite avec le point F ; que ces deux points équidistants de X′X en sont à une distance égale au rayon du cercle de construction.

Actuellement, nous donnerons la dénomination de points correspondants de la strophoïde à deux points situés sur deux rayons issus du point double O et également inclinés sur les droites OX, OF, ou plutôt sur la bissectrice de leur angle ON ; B′, D′ sont deux points correspondants : les points B, D du cercle de construction, qui ont servi à la construire, sont situés sur une corde BD perpendiculaire à Y′Y.

La corde B′D′ qui unit deux points correspondants, et la corde BD qui unit les deux points du cercle qui ont servi à la construire, se coupent sur le diamètre Y′Y.

En effet, désignons par I le point commun des droites BD, B′D′, et considérons B′D′ comme une transversale au triangle BOD, on a

$$OD' \times DI \times BB' = OB' \times BI \times DD'.$$

Menons BK parallèle à DR, on voit facilement qu'on a les égalités

$$\begin{aligned} OD' &= DR = BK, \\ BB' &= OQ, \\ OB' &= BQ, \\ DD' &= OR. \end{aligned}$$

On en déduit, par substitution,

$$BK \times OQ \times DI = BQ \times OR \times BI.$$

Mais les deux triangles QBK, QOR sont semblables, puis-que OR est parallèle à BK; on en déduit

$$\frac{BK}{OR} = \frac{BQ}{OQ},$$

ou

$$BK \times OQ = BQ \times OR.$$

Comparant cette égalité avec la précédente, on en déduit

$$BI = DI. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il en résulte une nouvelle démonstration de ce fait que les points A′, F, C′ sont en ligne droite.

Prolongeons OF jusqu'au point diamétralement opposé O_1, puis unissons IO_1 : cette droite est perpendiculaire à B′D′.

Pour le démontrer, abaissons $O\alpha$, $O_1\beta$, $B'\gamma$ perpendiculaires sur Y′Y; il suffit d'établir la similitude des triangles rectangles $IB'\gamma$, $IO_1\beta$, ou la proportion

$$\frac{I\gamma}{O_1\beta} = \frac{B'\gamma}{I\beta}.$$

Mais on voit facilement que

$$\begin{gathered} I\gamma = \alpha Q, \\ O_1\beta = O\alpha, \\ B'\gamma = 2O\alpha + BH = O\alpha + BI, \\ I\beta = IF + F\beta = IF + F\alpha. \end{gathered}$$

Donc, substituant, il suffit de montrer que

$$\frac{\alpha Q}{O\alpha} = \frac{\alpha O + BI}{IF + F\alpha},$$

ou encore, comme les triangles BOH, $O\alpha Q$ sont semblables, et qu'en conséquence

$$\frac{\alpha Q}{O\alpha} = \frac{OH}{BH} = \frac{F\alpha - IF}{BI - O\alpha},$$

que

$$\frac{F\alpha - IF}{BI - O\alpha} = \frac{BI + O\alpha}{F\alpha + IF}.$$

Or cette dernière égalité est équivalente à

$$\overline{F\alpha}^2 + \overline{O\alpha}^2 = \overline{IF}^2 + \overline{BI}^2,$$

qui est satisfaite, puisqu'elle exprime que les points O, B sont équidistants du point F. La proposition est ainsi établie.

Il en résulte que les cordes de la strophoïde, qui unissent deux points correspondants, enveloppent une parabole ayant pour foyer O_1, point symétrique du point double par rapport au centre du cercle de construction, et pour directrice la droite X'X.

Il en résulte encore que la droite OFO_1 est perpendiculaire sur A'C', qui, d'après cela, se trouve parallèle à OG. Désormais nous donnerons aux points A' et C' la dénomination de *points correspondants principaux*.

(*La suite prochainement.*)