GAMBEY

Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours d'agrégation de 1873

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 39-43

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__39_0>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1873;

PAR M. GAMBEY,

Professeur au lycée de Saint-Étienne.

I. *Solution géométrique.* — Soit un point quelconque P de l'ellipse de gorge. Par ce point passent deux génératrices rectilignes de la surface G et G′, symétriques par rapport au plan de cette ellipse. Les normales à la surface, menées par les points M et M′, appartenant aux génératrices G et G′, sont évidemment aussi symétriques par rapport au plan de l'ellipse de gorge, et, par suite, percent ce plan au même point R, et font des angles égaux avec ce plan. Donc le *rayon réfléchi* se confond avec la normale en M′ à l'hyperboloïde. Le lieu cherché est donc identique à celui des normales à l'hyperboloïde, menées tout le long d'une même génératrice rectiligne. Or ce dernier est un paraboloïde hyperbolique; donc, etc.

La normale en P à l'hyperboloïde étant dans le plan de l'ellipse de gorge, le centre de la sphère, considérée dans l'énoncé, décrit cette normale; d'où il suit que l'enveloppe cherchée est une surface de révolution ayant pour axe la normale en P à la surface proposée. De plus, la génératrice G étant tangente à toutes les sphères, l'enveloppe contient cette génératrice. Dès lors, cette enveloppe est un hyperboloïde de révolution (*).

II. *Solution analytique.* — Soit l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

(*) Solution analogue par M. G. Launoy, professeur au lycée de Tournus.

et la génératrice rectiligne

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

équations que nous écrirons

$$(\mathrm{G})\qquad \left\{\begin{array}{l} 2bx-any-abm=0,\\ 2bz+cmy-bcn\ =0,\end{array}\right.$$

en posant

$$\lambda+\frac{1}{\lambda}=m,$$

$$\lambda-\frac{1}{\lambda}=n.$$

Posons, de plus,

$$a^2-b^2=l^2,$$
$$a^2+c^2=k^2,$$
$$b^2+c^2=h^2.$$

Les équations de la normale au point $M(\alpha, \beta, \gamma)$ de la génératrice G sont

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{\alpha}=\frac{b^2(y-\beta)}{\beta}=-\frac{c^2(z-\gamma)}{\gamma}.$$

Le point où cette normale perce le plan des xy a pour coordonnées

$$x_1=\frac{h^2\alpha}{a^2},\quad y_1=\frac{k^2\beta}{b^2},\quad z_1=0.$$

Pour avoir les équations du rayon réfléchi, écrivons l'équation du cône de révolution qui a pour sommet le point d'incidence et son axe perpendiculaire au plan des xy, nous obtiendrons

$$\left[\frac{(a^2x-h^2\alpha)^2}{a^4}+\frac{(b^2y-k^2\beta)^2}{b^4}\right]\frac{\gamma^2}{c^4}-\left(\frac{\alpha^2}{a^4}+\frac{\beta^2}{b^4}\right)z^2=0.$$

Cette équation, jointe à celle du plan vertical contenant la normale, c'est-à-dire à

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{\alpha}=\frac{b^2(y-\beta)}{\beta},$$

représente à la fois le *rayon incident* et le *rayon réfléchi*; mais, si l'on élimine y, par exemple, entre ces deux équations, on pourra obtenir les équations du rayon réfléchi seulement. On trouve, après quelques calculs et réductions, puis suppression du facteur $\frac{\alpha^2}{a^4}+\frac{\beta^2}{b^4}$,

$$[(k^2\alpha-a^2x)\gamma+c^2\alpha z][(k^2\alpha-a^2x)\gamma-c^2\alpha z]=0,$$

qui se dédouble en

$$(k^2\alpha-a^2x)\gamma+c^2\alpha z=0,$$
$$(k^2\alpha-a^2x)\gamma-c^2\alpha z=0.$$

On peut écrire ces équations ainsi :

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{\alpha}=-\frac{c^2(z-\gamma)}{\gamma},$$
$$\frac{a^2(x-\alpha)}{\alpha}=\frac{c^2(z+\gamma)}{\gamma};$$

elles ne diffèrent que par le signe de γ. Donc le rayon réfléchi a pour équations

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{\alpha}=\frac{b^2(y-\beta)}{\beta}=\frac{c^2(z+\gamma)}{\gamma}.$$

Ce sont celles de la normale à l'hyperboloïde au point M', symétrique de M par rapport au plan des xy.

Le lieu demandé est donc un paraboloïde hyperbolique.

La sphère considérée dans l'énoncé a pour équation

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2=(\alpha-x_1)^2+(\beta-y_1)^2+\gamma^2,$$

ou bien, en tenant compte des valeurs de x_1, y_1 en fonction de α, β, γ,

$$\frac{(a^2x - k^2\alpha)^2 - c^4\alpha^2}{a^4} + \frac{(b^2y - h^2\beta)^2 - c^4\beta^2}{b^4} + \frac{c^4(z^2 - \gamma^2)}{c^4} = 0,$$

les indéterminées α, β, γ étant liées par les relations

$$2b\alpha - an\beta - abm = 0,$$
$$2b\gamma + cm\beta + bcn = 0.$$

On peut en tirer les valeurs de α et γ en fonction de β, et substituer dans l'équation de la sphère, ce qui donne, après quelques calculs,

$$(4h^2 + n^2k^2)a\beta^2 + 2(abk^2mn - 2bk^2nx - 4ah^2y)\beta$$
$$+ 4ab^2(x^2 + y^2 + z^2) + k^2ab^2m - 4ab^2c^2 - 4k^2b^2x = 0.$$

Cette équation est de la forme

$$M\beta^2 + 2N\beta + P = 0,$$

M, N et P étant des fonctions de x, y, z ne contenant pas β. L'enveloppe est donc

$$N^2 - MP = 0,$$

ou bien, plus explicitement,

$$(abk^2mn - 2k^2bnx - 4h^2ay)^2$$
$$= ab^2(4h^2 + n^2k^2)[4a(x^2 + y^2 + z^2) + ak^2m - 4ac^2 - 4k^2x],$$

équation d'une surface du second ordre.

En comparant avec l'équation générale des surfaces du second ordre, et posant, pour abréger,

$$a^2b^2(a^2n^2 + c^2m^2 + 4b^2) = R^6,$$

on trouve

$$A = 4(k^4b^2n^2 - R^6),$$
$$A' = 4(4h^4a^2 - R^6),$$
$$A' = -4R^6,$$
$$B = 0,\quad B' = 0,\quad B'' = 8h^2k^2abn;$$

par suite,

$$A - A'' = 4k^4 b^2 n^2,$$
$$A' - A'' = 16h^4 a^2,$$
$$(A - A'')(A' - A'') = 64h^4 k^4 a^2 b^2 n^2 = B''^2.$$

Ainsi la surface est de révolution. On trouve, pour les équations de l'axe,

$$z = 0,$$
$$2ah^2 x - bk^2 ny - h^2 k^2 m = 0,$$

et l'on vérifie sans peine que cette droite est le lieu des intersections, avec le plan des xy, des normales à l'hyperboloïde, le long de la génératrice G.