L. Maleyx

Séparation des racines des équations à une inconnue (note sur un théorème précédent)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 385-389

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__385_1>

SÉPARATION DES RACINES DES ÉQUATIONS A UNE INCONNUE

(Note sur un théorème précédent);

PAR M. L. MALEYX.

I. J'ai démontré, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. XI), un théorème ayant pour objet la séparation des racines d'une équation à une inconnue, et j'en ai conclu (n° V, remarque II) que la séparation des racines d'une équation algébrique dont le degré ne surpasse pas $2m+1$ peut se ramener à la séparation et à l'approximation convenable de celles de quatre équations dont les degrés ne surpassent pas respectivement m.

Cette conclusion repose sur la possibilité d'écrire l'identité

$$\varphi(x)\times F(x) = F_3(x)\times F'(x) + F_2(x);$$

$F(x)$ étant un polynôme entier dont le degré ne surpasse pas $2m+1$ et dont les coefficients sont numériquement donnés, $F'(x)$ son polynôme dérivé, $\varphi(x)$, $F_3(x)$, $F_2(x)$ étant des polynômes entiers en x dont les degrés ne surpassent pas respectivement $m-1$, m et m. Seulement, pour déterminer les coefficients des polynômes $\varphi(x)$, $F_3(x)$, $F_2(x)$, je fus conduit à employer la méthode des coefficients indéterminés; depuis, j'ai trouvé la loi de formation de ces polynômes, et je me propose de l'exposer ici.

II. Écrivons la suite des égalités qui expriment les opérations nécessaires pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynômes A et B. Soient Q_1, $Q_2, \ldots, Q_n$ les n premiers quotients, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ les n premiers restes; on aura

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} A &= B \times Q_1 + R_1,\\ B &= R_1 \times Q_2 + R_2,\\ R_1 &= R_2 \times Q_3 + R_3,\\ R_2 &= R_3 \times Q_4 + R_4,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ R_{n-4} &= R_{n-3} \times Q_{n-2} + R_{n-2},\\ R_{n-3} &= R_{n-2} \times Q_{n-1} + R_{n-1},\\ R_{n-2} &= R_{n-1} \times Q_n + R_n. \end{aligned}\right.$$

Multiplions les $n-1$ premières des égalités (α) par les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, satisfaisant aux égalités suivantes :

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_1 + Q_2\lambda_2 - \lambda_3 = 0,\\ &\lambda_2 + Q_3\lambda_3 - \lambda_4 = 0,\\ &\lambda_3 + Q_4\lambda_4 - \lambda_5 = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\lambda_{n-3} + Q_{n-2}\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1} = 0,\\ &\lambda_{n-2} + Q_{n-1}\lambda_{n-1} - 1 = 0,\\ &\lambda_{n-1} + Q_n = 0. \end{aligned}\right.$$

Si nous ajoutons les égalités (α) respectivement multipliées par les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, satisfaisant aux égalités (β), nous aurons

$$\lambda_1 A + B\lambda_2 = B \times Q_1\lambda_1 + R_n,$$

qu'on peut écrire

$$(\gamma) \qquad \lambda_1 A = B \times (Q_1 \times \lambda_1 - \lambda_2) + R_n.$$

Les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ s'obtiennent facilement et successivement d'après les égalités (β) et à partir du dernier.

Le dernier λ_{n-1} est égal au quotient, changé de signe, de la dernière division.

Le précédent est égal au produit, changé de signe, du dernier par le quotient de même indice, ce résultat étant augmenté de 1.

Les autres se forment chacun au moyen des deux suivants, en ajoutant au produit, changé de signe, de celui qui vient immédiatement après celui qu'on veut former par le quotient de même indice, celui qui le suit de deux rangs.

On voit, de plus, que le degré de chacun de ces facteurs est la somme des degrés des quotients de toutes les divisions qui suivent celle dont l'égalité correspondante a été multipliée par ce facteur.

Soient maintenant m le degré de A, n celui de B, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ceux de $R_1, R_2, \ldots, R_n$, et $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ceux de $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ respectivement; on a

$$\begin{aligned} m &= n + q_1, \\ n &= r_1 + q_2, \\ r_1 &= r_2 + q_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_{n-2} &= r_{n-1} + q_n. \end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre, on en conclut

$$m = q_1 + q_2 + \ldots + q_n + r_{n-1}.$$

On aurait de même, en prenant une égalité de plus dans le système (α),

$$m = q_1 + q_2 + \ldots + q_n + q_{n+1} + r_n.$$

Supposons que nous ayons pris n de manière à vérifier les deux inégalités

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n \leqq \frac{m}{2},$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n + q_{n+1} > \frac{m}{2}.$$

Il résulte de la seconde, et par comparaison avec la dernière égalité, que $r_n < \frac{m}{2}$; or $q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ est le degré du facteur $Q_1 \lambda_1 - \lambda_2$ qui figure dans l'égalité (γ), λ_1 est d'un degré inférieur; donc les degrés des polynômes λ_1, $Q_1 \lambda_1 - \lambda_2$, R_n ne surpassent pas respectivement $\frac{m}{2} - 1$, $\frac{m}{2}$ et $\frac{m}{2}$.

L'égalité (γ) est donc dans les mêmes conditions que l'égalité

$$\varphi(x) \times F(x) = F_3(x) F'(x) + F_2(x)$$

de notre théorème précédent, et l'on peut en déduire le moyen de former les coefficients $\varphi(x)$, $F_3(x)$, $F_2(x)$.

III. On peut encore déduire de ce qui précède et de notre théorème déjà cité que, si l'on considère la suite des polynômes de Sturm, que l'on s'arrête à l'un d'eux, V_r par exemple, puis qu'on élimine entre les égalités qui ont servi à le déterminer tous les polynômes d'indice inférieur, on arrivera à une égalité de la forme

$$\varphi(x) \times F(x) = F'(x) \times \psi(x) + V_r.$$

Les racines de l'équation $F(x) = 0$ seront séparées par celles de l'équation

$$\psi(x) \times V_r = 0;$$

donc le degré ne peut surpasser $m - 1$, si m est le degré de l'équation $F(x) = 0$.