MONNIOT

Sur le tore et la sphère bitangente

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 383-385

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__383_1>

SUR LE TORE ET LA SPHÈRE BITANGENTE;

PAR M. MONNIOT.

Soit

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-d^2)^2=4a^2(x^2+y^2)$$

l'équation d'un tore dont le méridien dans le plan $y=0$ a pour équation

$$x^2+z^2+a^2-d^2=\pm 2ax,$$

qui représente deux cercles.

La sphère $(x-\alpha)^2+y^2+(z-\gamma)^2-r^2=0$ sera *bitangente au tore* si le cercle $(x-\alpha)^2+(z-\gamma)^2-r^2=0$ est tangent intérieurement à l'un des cercles méridiens et extérieurement à l'autre. Les équations de condition seront

$$\sqrt{(\alpha-a)^2+\gamma^2}+d=r,$$
$$\sqrt{(\alpha+a)^2+\gamma^2}-d=r;$$

d'où l'on déduit

$$(\mathrm{K})\qquad\left\{\begin{aligned}&\alpha^2+\gamma^2=r^2+d^2-a^2,\\&4a\alpha=4dr,\\&\gamma^2=r^2+d^2-a^2-\frac{d^2r^2}{a^2}.\end{aligned}\right.$$

L'équation de la sphère bitangente pourra s'écrire

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\gamma z+d^2-a^2=0,$$

ou, en posant $a^2-d^2=c^2$,

$$(1)\qquad x^2+y^2+z^2-c^2=2\alpha x+2\gamma z.$$

L'équation du tore s'écrit

$$(x^2+y^2+z^2+c^2)^2-4a^2(x^2+y^2)=0,$$

ou

$$(x^2+y^2+z^2-c^2)^2+4c^2z^2+4(c^2-a^2)(x^2+y^2)=0,$$

ou enfin

$$(2)\qquad (x^2+y^2+z^2-c^2)^2+4c^2z^2-4d^2(x^2+y^2)=0.$$

On aura une surface passant par les points communs au tore et à la sphère, en élevant les deux membres de l'équation (1) au carré, et la retranchant de l'équation (2), ce qui donne, après transposition et suppression du facteur 4,

$$(3)\qquad (\alpha x+\gamma z)^2+c^2z^2-d^2(x^2+y^2)=0.$$

On aura démontré que *l'intersection du tore et de la sphère bitangente se compose de deux cercles,* si l'on fait voir que la surface représentée par l'équation (3) est un système de deux plans. Or cette équation peut s'écrire

$$[(\alpha^2-d^2)x^2+2\alpha\gamma xz+(\gamma^2+c^2)z^2]-d^2y^2=0;$$

et le théorème sera démontré, si l'on fait voir que la quantité entre crochets est un carré parfait, ou que

$$\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2-d^2)(\gamma^2+c^2)=0,$$

ou

$$-\alpha^2c^2+\gamma^2d^2+c^2d^2=0,$$

ou

$$-\alpha^2(a^2-d^2)+\gamma^2d^2+c^2d^2=0,$$

ou

$$\alpha^2 + \gamma^2 + c^2 = \frac{a^2 \alpha^2}{d^2},$$

ou, d'après les équations (K),

$$r^2 + d^2 - a^2 + a^2 - d^2 = r^2,$$

ce qui est évident.