NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BOUGAÏEFF

Problèmes sur quelques fonctions numériques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 381-383

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__381_1>

PROBLÈMES SUR QUELQUES FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. BOUGAÏEFF, de Moscou.

1. Démontrer que le nombre

$$S\theta\left(\frac{n}{a^2}\right) - S\theta\left(\frac{n}{ab}\right) + 2\theta(\sqrt[3]{n})$$

est divisible par 3,

$\theta(n)$ désignant combien il y a de nombres premiers non supérieurs à n;

$S\theta\left(\frac{n}{a^2}\right)$ la somme prise pour tous les nombres premiers a;

$S\theta\left(\frac{n}{ab}\right)$ la somme étendue à tous les produits ab des nombres premiers différents entre eux.

Exemple : $n = 30$,

$$S\theta\left(\frac{30}{a^2}\right) = \theta\left(\frac{30}{2^2}\right) + \theta\left(\frac{30}{3^2}\right) + \theta\left(\frac{30}{5^2}\right) = 4 + 2 = 6,$$

$$S\theta\left(\frac{30}{ab}\right) = \theta\left(\frac{30}{2.3}\right) + \theta\left(\frac{30}{2.5}\right) + \theta\left(\frac{30}{2.7}\right) + \theta\left(\frac{30}{2.11}\right)$$
$$+ \theta\left(\frac{30}{2.13}\right) + \theta\left(\frac{30}{3.5}\right) + \theta\left(\frac{30}{3.7}\right)$$
$$= 3 + 2 + 1 + 1 = 7,$$

$$\theta(\sqrt[3]{30}) = 2,$$

$$S\theta\left(\frac{n}{a^2}\right) - S\theta\left(\frac{n}{ab}\right) + 2\theta(\sqrt{n}) = 6 - 7 + 2.2 = 3.$$

2. Démontrer que, pour $n > 1$, on a

$$6\varphi_2(n) = 2\varphi(n)n^2 + (-1)^{\xi(n)}\xi_1(n)\varphi(n),$$

$\varphi(n)$ désignant combien il y a d'entiers premiers à n et inférieurs à n;

$\varphi_2(n)$ la somme des carrés de ces nombres;

$\xi(n)$ le nombre de nombres premiers différents qui sont les diviseurs de n;

$\xi_1(n)$ le produit de ces nombres premiers.

Ainsi, pour $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma$,

$$\xi_1(n) = abc, \quad \xi(n) = 3.$$

Exemple : $n = 6$, $\varphi_2(6) = 1^2 + 5^2 = 26$, $\varphi(6) = 2$,

$$\xi(6) = 2, \quad \xi_1(6) = 6,$$
$$6(1^2 + 5^2) = 2.2\,6^2 + 2.6 = 156.$$

3. Soit $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Désignons par n' le nombre

$$a^{\mathrm{E}\frac{\alpha}{2}} b^{\mathrm{E}\frac{\beta}{2}} c^{\mathrm{E}\frac{\gamma}{2}},$$

$\mathrm{E}(x)$ étant le plus grand entier contenu dans une quantité quelconque x. Démontrer qu'on a

$$\mathrm{S}_1^n u' = 1' + 2' + \ldots + n' = \mathrm{S}\varphi(u)\,\mathrm{E}\,\frac{n}{u^2}$$
$$= \varphi(1)\,\mathrm{E}\,\frac{n}{1^2} + \varphi(2)\,\mathrm{E}\,\frac{n}{2^2} + \ldots.$$

Exemple : $n = 6$, $1' = 1$, $2' = 1$, $3' = 1$, $4' = 2$, $5' = 1$, $6' = 1$,

$$\mathrm{S}_1^6 u' = 7 = \varphi(1)\,\mathrm{E}\,\frac{6}{1^2} + \varphi(2)\,\mathrm{E}\,\frac{6}{2^2} = 6 + 1.$$