

BOUGAÏEFF

**Problèmes sur quelques fonctions
numériques**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13
(1874), p. 381-383

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__381_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES SUR QUELQUES FONCTIONS NUMÉRIQUES ;

PAR M. BOUGAÏEFF, de Moscou.

1. Démontrer que le nombre

$$S\theta\left(\frac{n}{a^2}\right) - S\theta\left(\frac{n}{ab}\right) + 2\theta(\sqrt[3]{n})$$

est divisible par 3,

$\theta(n)$ désignant combien il y a de nombres premiers non supérieurs à n ;

$S\theta\left(\frac{n}{a^2}\right)$ la somme prise pour tous les nombres premiers a ;

$S\theta\left(\frac{n}{ab}\right)$ la somme étendue à tous les produits ab des nombres premiers différents entre eux.

Exemple : n = 30,

$$S\theta\left(\frac{30}{a^2}\right) = \theta\left(\frac{30}{2^2}\right) + \theta\left(\frac{30}{3^2}\right) + \theta\left(\frac{30}{5^2}\right) = 4 + 2 = 6,$$

$$S\theta\left(\frac{30}{ab}\right) = \theta\left(\frac{30}{2 \cdot 3}\right) + \theta\left(\frac{30}{2 \cdot 5}\right) + \theta\left(\frac{30}{2 \cdot 7}\right) + \theta\left(\frac{30}{2 \cdot 11}\right) \\ + \theta\left(\frac{30}{2 \cdot 13}\right) + \theta\left(\frac{30}{3 \cdot 5}\right) + \theta\left(\frac{30}{3 \cdot 7}\right)$$

$$= 3 + 2 + 1 + 1 = 7,$$

$$\theta(\sqrt[3]{30}) = 2,$$

$$S\theta\left(\frac{n}{a^2}\right) - S\theta\left(\frac{n}{ab}\right) + 2\theta(\sqrt{n}) = 6 - 7 + 2 \cdot 2 = 3.$$

2. Démontrer que, pour $n > 1$, on a

$$6\varphi_2(n) = 2\varphi(n)n^2 + (-1)^{\xi(n)}\xi_1(n)\varphi(n),$$

$\varphi(n)$ désignant combien il y a d'entiers premiers à n et inférieurs à n ;

$\varphi_2(n)$ la somme des carrés de ces nombres;

$\xi(n)$ le nombre de nombres premiers différents qui sont les diviseurs de n ;

$\xi_1(n)$ le produit de ces nombres premiers.

Ainsi, pour $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma$,

$$\xi_1(n) = abc, \quad \xi(n) = 3.$$

Exemple : n = 6, $\varphi_2(6) = 1^2 + 5^2 = 26$, $\varphi(6) = 2$,

$$\xi(6) = 2, \quad \xi_1(6) = 6,$$

$$6(1^2 + 5^2) = 2 \cdot 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 = 156.$$

3. Soit $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Désignons par n' le nombre

$$\frac{E^\alpha}{a^{\alpha-2}} \frac{E^\beta}{b^{\beta-2}} \frac{E^\gamma}{c^{\gamma-2}},$$

$E(x)$ étant le plus grand entier contenu dans une quan-

ité quelconque x . Démontrer qu'on a

$$\begin{aligned} S_1^n u' &= 1' + 2' + \dots + n' = S\varphi(u) E \frac{n}{u'} \\ &= \varphi(1) E \frac{n}{1^2} + \varphi(2) E \frac{n}{2^2} + \dots \end{aligned}$$

Exemple : $n = 6$, $1' = 1$, $2' = 1$, $3' = 1$, $4' = 2$,
 $5' = 1$, $6' = 1$,

$$S_1^6 u' = 7 = \varphi(1) E \frac{6}{1^2} + \varphi(2) E \frac{6}{2^2} = 6 + 1.$$