NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. PICART

Série de Taylor

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 353-367

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__353_0>

SÉRIE DE TAYLOR;

PAR M. A. PICART.

Si une quantité u est liée à une autre quantité z, de telle sorte qu'à une valeur quelconque de z corresponde une ou plusieurs valeurs déterminées de u, cette quantité u est dite une fonction de z.

Lorsqu'à toute valeur réelle de z comprise entre z_0 et z_1 correspond une valeur réelle de u, cette quantité u est dite une fonction réelle de z entre les limites z_0 et z_1.

Si la variable z reçoit des valeurs imaginaires de la forme $x+y\sqrt{-1}$, la fonction u doit être regardée comme une quantité de la forme $X+Y\sqrt{-1}$, dans laquelle X et Y sont des fonctions réelles de x et y.

Dans ce cas, on représente géométriquement la variable z par le point dont les coordonnées, relativement à deux axes rectangulaires, sont x et y, et chacune des valeurs de la fonction u par le point correspondant, dont les coordonnées sont X et Y; et alors la variation continue de z, depuis une valeur initiale $z_0 = x_0 + y_0 i$ jusqu'à une valeur quelconque $z_1 = x_1 + y_1 i$, est figurée par une ligne partant du point (x_0, y_0), et aboutissant au point (x_1, y_1), de même que la marche correspondante de la fonction u est figurée par une ligne continue ou discontinue qui va du point (X_0, Y_0) au point (X_1, Y_1).

La fonction $u = f(z)$ est dite *continue* dans une région circonscrite du plan, lorsque, la variable z parcourant une ligne quelconque C située dans cette région, la valeur unique de u, ou chacune de ses valeurs multiples correspondantes, est représentée, dans ses variations successives, par une ligne continue.

Si l'on désigne par $f'(z)$ la limite vers laquelle tend, en chaque point de la courbe C, le rapport de l'accroissement de la fonction $f(z)$ à l'accroissement de la variable, lorsque ce dernier accroissement relatif à un déplacement sur la courbe tend vers zéro, l'accroissement total de la fonction, du point z_0 au point z sur la courbe C, ou $f(z)-f(z_0)$, est la limite vers laquelle tend la somme des valeurs que prend la quantité $f'(z)\,dz$ pour toutes les valeurs de z comprises entre z_0 et z_1 et ayant pour différences successives dz, lorsque toutes ces différences tendent vers zéro suivant une loi quelconque; en d'autres termes, si l'on suppose le contour que parcourt la variable z divisé par des points $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ en n arcs infiniment petits, la somme des produits des valeurs que prend $f'(z)$ aux points $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ multipliées respectivement par les accroissements successifs que subit la variable en passant de z_0 en z_1, de z_1 en z_2, et ainsi de suite, cette somme, lorsque la distance de deux points voisins tend vers zéro, a une limite indépendante de la loi suivant laquelle ces points successifs se rapprochent indéfiniment; et cette limite n'est autre que $f(z)-f(z_0)$, de telle sorte que la valeur de la fonction $f(z)$, en un point quelconque de la courbe C, peut être regardée comme donnée par l'équation

$$(1) \qquad f(z)=f(z_0)+\int_{z_0}^{z_1} f'(z)\,dz.$$

Une fonction *continue* $f(z)$ est dite *monodrome* dans une portion du plan, lorsque, la valeur de la fonction étant fixée pour un point quelconque donné de cette région, la valeur qu'elle acquiert en un autre point quelconque z de cette même région, par sa variation continue relative au déplacement de la variable z sur une courbe C qui relie le point z_0 au point z, sans sortir de la région considérée, est indépendante de la forme de la ligne C parcourue par la variable, et de la loi de la marche progressive de la variable sur cette ligne; c'est-à-dire que l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz$ a une valeur indépendante de la forme du contour suivi par la variable z et de la loi suivant laquelle varie dz le long de ce contour.

Enfin la fonction $f(z)$ est dite *monogène* lorsque, en tout point du plan, sa dérivée $f'(z)$ a une valeur unique, c'est-à-dire que, pour un déplacement infiniment petit de la variable à partir d'un point z, le rapport de l'accroissement infiniment petit de la fonction à l'accroissement infiniment petit de la variable a une valeur déterminée indépendante de la direction du déplacement.

Une fonction qui est à la fois *continue, monodrome* et *monogène*, dans une certaine portion du plan, est dite *synectique* dans cette région.

Théorème I. — *La dérivée d'une fonction synectique dans une certaine étendue du plan est elle-même une fonction synectique dans cette étendue.*

Montrons d'abord que, si la dérivée d'une fonction est *synectique*, la fonction elle-même est synectique. En effet, elle est déjà évidemment *monogène* et *continue*; de plus, la variation que subit l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} f'(z)\,dz$ prise le long d'un contour, quand on passe de ce contour à un autre infiniment voisin, de mêmes extrémités, est nulle; car

$$\delta \int_{z_0}^{z} f'(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} [\delta f'(z)dz + f'(z)d\,\delta z],$$

ou, puisque $\frac{\delta f'(z)}{\delta z} = \frac{df'(z)}{dz}$,

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} f'(z)\,dz = \int_{z_0}^{z} [df'(z)\delta z + f'(z)\,d\delta z]$$
$$= \int_{z^0}^{z_1} d[f'(z)\delta z] = [f'(z)\delta z]_{z_0}^{z_1},$$

et cette dernière quantité est égale à zéro, puisque la variation δz est nulle aux deux limites de l'intégrale. La fonction $f(z)$, qui est égale à $f(z_0) + \int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz$, prend donc la même valeur au point z, quel que soit, dans la région considérée, le chemin suivi par la variable z pour aller de z_0 en z; en d'autres termes, cette fonction est *monodrome*.

Montrons, en second lieu, qu'une fonction ne peut être *synectique* sans que sa dérivée ne le soit elle-même. Il suffit de faire voir que l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz$ ne peut avoir pour chaque point z une valeur finie, déterminée et indépendante du chemin parcouru par la variable, qu'autant que la fonction $f'(z)$ est continue, *monodrome* et *monogène*. En effet, supposons que, le long d'un certain contour AB, $f'(z)$ devienne infini pour une valeur a de z, c'est-à-dire pour un point M de ce contour, la valeur de l'intégrale, prise le long du contour, est la limite vers laquelle tend la somme des intégrales

$$\int_{z_0}^{a+\varepsilon} f'(z)\,dz + \int_{a+\varepsilon'}^{z_1} f'(z)\,dz,$$

où $a+\varepsilon$ et $a+\varepsilon'$ désignent les valeurs de z qui correspondent à deux points M_1, M_2 situés l'un en deçà de M, l'autre au delà, lorsque ces points M_1 et M_2

se rapprochent indéfiniment du point M suivant une loi quelconque, c'est-à-dire lorsque les quantités ε et ε' tendent simultanément vers zéro, en conservant entre elles un rapport quelconque. Or chacune de ces intégrales peut se décomposer en deux, la première en

$$\int_{z_0}^{h} f'(z)\,dz + \int_{h}^{a+\varepsilon} f'(z)\,dz,$$

la seconde en

$$\int_{a+\varepsilon'}^{k} f'(z)\,dz + \int_{k}^{z_1} f'(z)\,dz,$$

h et k désignant les valeurs qui correspondent respectivement à deux points fixes, situés l'un en deçà de M_1 et l'autre au delà de M_2, dans le voisinage du point M.

Les deux sommes $\int_{z_0}^{h} f'(z)\,dz$, $\int_{k}^{z_1} f'(z)\,dz$ sont finies et déterminées ; quant aux deux autres, savoir $\int_{h}^{a+\varepsilon} f'(z)\,dz$ et $\int_{a+\varepsilon'}^{k} f'(z)\,dz$, comme les points C et D sont très-voisins respectivement de M_1 et M_2, on peut les évaluer approximativement en substituant à $f'(z)$, dans les limites étroites de l'intégration, l'expression $\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$, dans laquelle $\varphi(z)$ désigne une fonction qui ne devient pas infinie pour $z=a$ et m un exposant positif.

Supposons d'abord $m=1$; la première de ces intégrales est alors sensiblement égale à $\varphi(a)\,l\cdot\frac{\varepsilon}{h-a}$, la seconde à $\varphi(a)\,l\cdot\frac{k-a}{\varepsilon'}$, et leur somme à $\varphi(a)\,l\cdot\frac{k-a}{h-a}+\varphi(a)\,l\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$. Comme le rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ peut tendre vers une limite quelconque, on voit que, dans ce cas, l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz$

est indéterminée. Si nous supposons m différent de l'unité, la somme des deux intégrales singulières

$$\int_{h}^{a+\varepsilon} f'(z)\,dz, \quad \int_{a+\varepsilon'}^{k} f'(z)\,dz$$

est alors

$$\frac{\varphi(a)}{1-m}\left[(k-a)^{1-m}-(h-a)^{1-m}\right]+\frac{\varphi(a)}{1-m}\left(\varepsilon^{1-m}-\varepsilon'^{1-m}\right);$$

et l'on voit que, dans le cas où m est plus grand que 1, cette somme est infinie, et qu'elle est nulle lorsque m est plus petit que 1. Sauf donc ce dernier cas, l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz$ est indéterminée ou infinie ; mais, quand m est une fraction plus petite que l'unité, telle que $\frac{p}{q}$, il y a q valeurs de $f'(z)$ qui deviennent en même temps infinies pour $z = a$; et il est évident que, lorsque la fonction $f'(z)$ a une détermination multiple et qu'en un point M du contour deux ou plusieurs valeurs de cette fonction deviennent égales, l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} f'(z)\,dz$ prend une valeur différente, suivant qu'à partir du point M on prend, pour achever l'intégration, l'une ou l'autre des valeurs de $f'(z)$ qui se séparent de plus en plus après avoir été égales. Nous pouvons donc enfin conclure que, si la fonction $f'(z)$ devient infinie, la fonction $f(z)$ ne peut être à la fois finie et bien déterminée.

Supposons maintenant qu'en un point M du contour $f'(z)$ saute brusquement d'une valeur à une autre. Dans ce cas, la fonction $f'(z)$ prend une valeur différente, suivant que la variable z aboutit à ce point dans une direction ou dans une autre. Or, lorsque la fonction $f'(z)$ ne prend pas la même valeur en un point, quel que soit le chemin suivi pour arriver à ce point, il est de toute évidence qu'on peut faire varier la valeur de l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} f'(z)\,dz$, en modifiant la ligne parcourue par la variable z, ce qui revient à dire qu'une fonction synectique a nécessairement une dérivée monodrome.

Enfin, pour que la fonction $f(z)$ soit monodrome, la dérivée $f'(z)$ doit être *monogène*; car, si elle n'était que continue et monodrome, sans être *monogène*, en calculant la variation que subit l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} f'(z)\,dz$, quand on substitue au contour suivi par la variable z un contour infiniment voisin, on reconnaîtrait que cette variation n'est pas nulle, qu'elle est un infiniment petit du même ordre que la différence des valeurs que prend la variable z pour deux points infiniment voisins des deux contours. En effet, en faisant correspondre à un point (z) du premier contour un point $(z+\delta z)$ du second, on a

$$\delta \int_{z^0}^{z_1} f'(z)\,dz = \int_{z_0}^{z} \delta[f'(z)\,dz]$$
$$= \int_{z_0}^{z_1} [\delta f'(z)\,dz + f'(z)\,d\delta z].$$

Si la fonction était monogène, on aurait

$$\frac{\delta f'(z)}{\delta z} = \frac{df'(z)}{dz}, \quad \text{ou} \quad \delta f'(z)\,dz = df'(z)\,\delta z,$$

et alors la variation de l'intégrale serait

$$\int_{z_0}^{z_1} [df'(z)\,\delta z + f'(z)\,d\delta z] = \int_{z_0}^{z_1} d\,[f'(z)\,\delta z] = [f'(z)\,\delta z]_{z_0}^{z_1}.$$

Comme δz est nulle aux deux limites, on voit que la variation serait nulle; mais, si la fonction $f'(z)$ n'est pas *monogène,* on a, k étant une quantité finie,

$$\frac{\delta f'(z)}{\delta z} = \frac{df(z)}{dz} + k,$$

d'où

$$\delta f'(z)\,dz = df'(z)\,\delta z + k\,dz\,\delta z;$$

par suite,

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} f'(z)\,dz = \int_{z_0}^{z} [df'(z)\,\delta z + f'(z)\,d\delta z] + \int_{z_0}^{z_1} k\,dz\,\delta z.$$

La première partie de cette variation est nulle, l'autre a généralement une valeur infiniment petite de l'ordre de δz; car on peut supposer que δz est égal à $\alpha\varphi(z)$, la fonction $\varphi(z)$ s'annulant pour $z = z_0$ et $z = z_1$, et α étant une quantité constante infiniment petite; alors $\int_{z_0}^{z_1} k\,dz\,\delta z$ devient $\alpha \int_{z_0}^{z_1} k\varphi(z)\,dz$, ce qui montre que la valeur de cette intégrale est de l'ordre de α ou de δz. La variation de l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} f'(z)\,dz$, pour un déplacement infiniment petit du contour auquel elle correspond, étant infiniment petite du même ordre que ce déplacement, on voit que, pour un déplacement fini de ce contour, la variation sera finie.

Donc une fonction $f(z)$ ne peut être synectique sans que sa dérivée $f'(z)$ ne le soit en même temps.

Mais quels sont les caractères auxquels on reconnaîtra qu'une fonction $f(z)$, définie analytiquement, est synectique dans une certaine région du plan? Il faudra :

1° Qu'elle ait en chaque point une dérivée unique, indépendante de la direction dans laquelle se déplace infiniment peu la variable z à partir de ce point; on sait que les conditions nécessaires et suffisantes sont

$$\frac{dX}{dx}=\frac{dY}{dy}, \quad \frac{dX}{dy}=-\frac{dY}{dx};$$

2° Qu'elle ne soit discontinue pour aucun point de cette région, c'est-à-dire ou qu'elle ne devienne pas infinie, ou que, par la variation continue de z, elle ne saute pas brusquement d'une valeur à une autre qui en diffère d'une quantité finie;

3° Qu'elle prenne en chaque point une valeur indépendante du chemin qu'a suivi la variable pour arriver à ce point, ce qui a lieu si la fonction a une détermination unique, ou lorsque, cette fonction ayant une détermination multiple, les diverses valeurs qu'elle prend pour chaque valeur de z restent toutes distinctes et inégales, et ce qui n'aura pas lieu si deux ou plusieurs de ces valeurs deviennent égales en de certains points.

Lorsqu'une fonction $f(z)$ remplit toutes ces conditions, ses dérivées successives, d'après le théorème précédent, les remplissent en même temps; en d'autres termes, lorsqu'une fonction est synectique dans une certaine portion du plan, ses dérivées successives sont aussi des fonctions synectiques dans cette même portion de plan.

Théorème II. — *Si $f(z)$ est une fonction synectique dans l'intérieur du cercle décrit du point (z_0) comme centre avec* R *pour rayon, on a*

$$\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{\theta i})e^{-n\theta i}d\theta=\frac{2\pi r^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(z_0),$$

r étant une constante réelle positive plus petite que R.

En effet, l'intégration par parties donne

$$\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{\theta i})e^{-n\theta i}d\theta=-\left[\frac{1}{ni}f(z_0+re^{\theta i})e^{-n\theta i}\right]_0^{2\pi}$$
$$+\frac{r}{n}\int_0^{2\pi} f'(z_0+re^{\theta i})e^{-(n-1)\theta i}d\theta;$$

mais le terme $\frac{1}{ni} f(z_0 + re^{\theta i}) e^{-n\theta i}$ prend la même valeur pour $\theta = 0$ et pour $\theta = 2\pi$; donc

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\theta i}) e^{-n\theta i} d\theta = \frac{r}{n} \int_0^{2\pi} f'(z_0 + re^{\theta i}) e^{-(n-1)\theta i} d\theta$$

de même

$$\int_0^{2\pi} f'(z_0 + re^{\theta i}) e^{-(n-1)\theta i} d\theta$$
$$= \frac{r}{n-1} \int_0^{2\pi} f''(z_0 + re^{\theta i}) e^{-(n-2)\theta i} d\theta,$$

et ainsi de suite; d'où l'on déduit

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\theta i}) e^{-n\theta i} = \frac{r^n}{1.2\ldots n} \int_0^{2\pi} f^{(n)}(z_0 + re^{\theta i}) d\theta.$$

Mais l'intégrale $\int_0^{2\pi} f^{(n)}(z_0 + re^{\theta i})\, d\theta$ est indépendante de r; car, si l'on passe du cercle de rayon r au cercle de rayon $r + \delta r$, en faisant correspondre deux à deux les points de ces deux cercles qui sont donnés par la même valeur de θ, on trouve, pour la variation de cette intégrale,

$$\frac{\delta r}{r} \int_0^{2\pi} f^{(n+1)}(z_0 + re^{\theta i})\, ire^{\theta i} d\theta \quad \text{ou} \quad \frac{\delta r}{r} \left[f^{(n)}(z_0 + re^{\theta i}) \right]_0^{2\pi}.$$

Or, la fonction $f(z)$ étant synectique dans le cercle de rayon R, sa dérivée $n^{ième}$ est aussi synectique dans l'étendue de ce cercle, c'est-à-dire qu'elle reprend la même valeur lorsque la variable z, partant d'un point, revient à ce point après avoir parcouru un contour quelconque dans l'intérieur du cercle; donc la variation de l'intégrale

$\int_0^{2\pi} f^n(z_0 + re^{\theta i})\,d\theta$ est nulle. Il en résulte qu'elle conserve la même valeur pour deux valeurs quelconques de r plus petites que R, et, par suite, qu'elle est égale à $\int_0^{2\pi} f^{(n)}(z_0)\,d\theta$ ou $2\pi f^n(z_0)$. On a donc

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}d\theta = \frac{2\pi r^n}{1.2\ldots n} f^n(z_0),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — On déduit de là que le module de $f^{(n)}(z_0)$ est plus petit que $1.2\ldots n\,\frac{\mathrm{M}}{r^n}$, M étant le maximum du module de $f(z)$ sur la circonférence du cercle de centre (z_0) et de rayon r.

Car, en vertu du théorème précédent,

$$f^n(z_0) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}d\theta,$$

et, par suite, le module de $f^n(z_0)$ est plus petit que $\frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\mathrm{M}\,d\theta$, ou $1.2..n\,\frac{\mathrm{M}}{r^n}$.

Théorème III. — *Si $f(z)$ est une fonction synectique dans l'intérieur et sur la circonférence du cercle* C *de centre (z_0) et de rayon* R, *la série*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & f(z_0) + f'(z_0)\frac{h}{1} + f''(z_0)\frac{h^2}{1.2} + f'''(z_0)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots \\ & \qquad\qquad + f^{(n)}(z_0)\frac{h^n}{1.2\ldots n} + \ldots \end{aligned}\right.$$

est convergente pour toutes les valeurs de h dont le module r est plus petit que R.

En effet, d'après le corollaire qui précède, le module du terme général $f^{(n)}(z_0)\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ est plus petit que $1.2\ldots n\frac{M}{R^n}\frac{r^n}{1.2\ldots n}$ ou $M\left(\frac{r}{R}\right)^n$, M étant le module maximum de la fonction $f(z)$ sur la circonférence de rayon R. Or la série dont le terme général est $M\left(\frac{r}{R}\right)^n$ est une progression géométrique décroissante; donc la série formée par les modules des termes de la série proposée est convergente, et, par suite, cette série elle-même est convergente.

Corollaire. — La série

$$(2)\quad f(z)+f'(z)\frac{h}{1}+f''(z)\frac{h^2}{1.2}+\ldots+f^{(n)}(z)\frac{h^n}{1.2\ldots n}+\ldots$$

est convergente pour toutes les valeurs de z comprises dans l'intérieur du cercle C, et pour toutes les valeurs de h dont le module est inférieur à $R-\rho$, ρ désignant le module de $z-z_0$, ou la distance du point (z) au point (z_0), ce qui revient à dire que la série

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} f(z)+f'(z)\frac{a-z}{1}+f''(z)\frac{(a-z)^2}{1.2}+f'''(z)\frac{(a-z)^3}{1.2.3}+\ldots \\ \qquad\qquad +f^{(n)}(z)\frac{(a-z)^n}{1.2\ldots n}+\ldots, \end{array}\right.$$

dans laquelle a est une constante représentée par un point intérieur au cercle C, reste convergente lorsque le point (z) se déplace dans l'intérieur de ce cercle, de manière que sa distance δ au point (a) soit moindre que sa plus courte distance d à la circonférence, c'est-à-dire dans l'intérieur d'une ellipse E ayant pour foyers (a) et (z_0), et pour axe focal R.

Cela posé, considérons la fonction de z définie par cette dernière série. Les dérivées de ses différents termes forment la série

$$
(4)\left\{\begin{aligned}
&f'(z)+\left[f''(z)\frac{(a-z)}{1}-f'(z)\right]\\
&\quad+\left[f'''(z)\frac{(a-z)^2}{1.2}-f''(z)(a-z)\right]+\ldots\\
&\quad+\left[f^{(n+1)}(z)\frac{(a-z)^n}{1.2\ldots n}-f^{(n)}(z)\frac{(a-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\right]+\ldots,
\end{aligned}\right.
$$

qui est convergente; car le module du terme général est, d'après le corollaire du théorème II, plus petit que

$$
\frac{M}{d}\left(\frac{\delta}{d}\right)^n+\frac{M}{d}\left(\frac{\delta}{d}\right)^{n-1}\quad \text{ou}\quad \left(\frac{M\delta}{d^2}+\frac{M}{d}\right)\left(\frac{\delta}{d}\right)^{n-1},
$$

M désignant le module maximum de la fonction $f(z)$ sur la circonférence de centre (z) et de rayon d. Donc la fonction de z, représentée par la série (4), est la dérivée de la fonction de z représentée par la série (3).

Mais, comme, en substituant leurs modules aux deux termes partiels qui constituent le terme général de la série (4), on obtient encore une série convergente, on en déduit qu'on peut intervertir l'ordre de tous ces termes partiels sans changer la somme de la série. Or, en les écrivant de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
&[f'(z)-f'(z)]+[f''(z)(a-z)-f''(z)(a-z)]\\
&\qquad+\left[f'''(z)\frac{(a-z)^2}{1.2}-f'''(z)\frac{(a-z)^2}{1.2}\right]+\ldots\\
&\qquad+\left[f^{(n+1)}(z)\frac{(a-z)^n}{1.2\ldots n}-f^{(n+1)}(z)\frac{(a-z)^n}{1.2\ldots n}\right]+\ldots,
\end{aligned}
$$

on voit que la somme de la série est nulle. Donc la dérivée de la fonction de z, définie par la série (3), est égale à zéro pour toute valeur de z comprise dans l'ellipse E; cette fonction est donc indépendante de z, elle ne dépend que de la constante a. Désignons-la par $\varphi(a)$;

nous aurons

$$\varphi(a) = f(z) + f'(z)\frac{a-z}{1} + f''(z)\frac{(a-z)^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ f^{(n)}(z)\frac{(a-z)^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Faisons $z = a$; le second membre, qui est une série convergente, se réduit à $f(a)$; donc $\varphi(a) = f(a)$, et cela pour toutes les valeurs de a comprises dans le cercle C. Donc la fonction φ, dans l'intérieur de ce cercle, n'est autre que la fonction f, et l'on a

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} f(a) &= f(z) + f'(z)\frac{(a-z)}{1} + f''(z)\frac{(a-z)^2}{1.2} + \ldots \\ &\quad + f^{(n)}(z)\frac{(a-z)^n}{1.2\ldots n} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

ou, en remplaçant $a - z$ par h et a par $z + h$,

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} f(z+h) &= f(z) + f'(z)\frac{h}{1} + f''(z)\frac{h^2}{1.2} + \ldots \\ &\quad + f^{(n)}(z)\frac{h^n}{1.2\ldots n} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Cette formule remarquable est donc ainsi démontrée lorsque la fonction $f(z)$ est synectique dans l'intérieur du cercle de centre (z) et de rayon R, et que le module de h est inférieur à R.

C'est là le développement connu sous le nom de *série de Taylor*.

On en déduit la série de Maclaurin, en supposant $z = 0$, ce qui donne

$$f(h) = f(0) + f'(0)\frac{h}{1} + f''(0)\frac{h^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ f^{(n)}(0)\frac{h^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Ce développement indéfini d'une fonction $f(h)$ suivant les puissances ascendantes entières et positives de la variable h a donc lieu lorsque la fonction $f(h)$ est synectique autour du point (o), et que la variable h reste comprise dans l'intérieur du cercle qui a pour centre ce point, et au delà duquel la fonction cesse d'être synectique.