NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 337-351

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__337_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 116 *et* 117

(voir 1re série, t. V, p. 167);

PAR M. H. BROCARD.

116. — *Un hexagone sphérique étant inscrit dans une courbe cono-sphérique, les intersections des côtés opposés déterminent six points situés sur la même circonférence de grand cercle.*

117. — *Un hexagone sphérique étant circonscrit à*

une courbe cono-sphérique, les trois grands cercles qui passent par les sommets opposés ont un même diamètre commun.

Nota. — On nomme *cono-sphérique* la ligne d'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré concentriques.

Supposons la nappe du cône prolongée hors de la sphère, et coupée par un plan quelconque suivant une conique. La perspective de l'hexagone sphérique inscrit (ou circonscrit) sur ce plan sera un hexagone rectiligne inscrit (ou circonscrit) à la conique. Dans chacun de ces deux cas, la droite qui unit deux des sommets de l'hexagone rectiligne est la perspective d'un arc de grand cercle, intersection de la sphère et d'un plan mené par son centre et par la droite considérée. Les théorèmes de *Pascal* et *Brianchon* s'appliquent donc aux courbes sphériques définies comme il a été dit, et les propositions 116 et 117 résultent immédiatement des propriétés des projections perspectives.

Question 1124

(voir 2e série, t. XII, p. 581);

PAR M. MORET-BLANC.

Si, sur une sphère dont le rayon est pris pour unité, on trace une courbe quelconque, on a, entre les coordonnées x, y, z de tout point de cette ligne, la relation

$$\begin{aligned}(x'^2+y'^2+z'^2)\left[(xy''-yx'')^2+(yz''-zy'')^2+(zx''-xz'')^2\right]\\ =(x'x''+y'y''+z'z'')^2\\ +\left[x(y'z''-z'y'')+y(z'x''-x'z'')+z(x'y''-y'x'')\right]^2,\end{aligned}$$

dans laquelle les accents des dérivées sont relatifs à une variable indépendante t. (CATALAN.)

On a les relations

$$(1)\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ xx'+yy'+zz'=0, \\ x'^2+y'^2+z'^2+xx''+yy''+zz''=0. \end{cases}$$

Or

$$[x(y'z''-z'y'')+y(z'x''-x'z'')+z(x'y''-y'x'')]^2$$

est le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

On a, par la règle de la multiplication des déterminants, en ayant égard aux relations (1), et en posant pour abréger

$$x'^2+y'^2+z'^2=A=-(xx''+yy''+zz''),$$
$$x'x''+y'y''+z'z''=B,$$
$$x''^2+y''^2+z''^2=C,$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & A & B \\ -A & B & C \end{vmatrix} = AC-B^2-A^3;$$

le second membre de la relation à vérifier est donc

$$AC-B^2-A^3+B^2=A(C-A^2).$$

Or on a identiquement

$$(xy''-yx'')^2+(yz''-zy'')^2+(zx''-xz'')^2$$
$$=(x^2+y^2+z^2)(x''^2+y''^2+z''^2)-(xx''+yy''+zz'')^2=C-A^2.$$

Le premier membre est donc aussi égal à $A(C-A^2)$, et la relation est démontrée.

Remarque.— Cette relation peut servir à trouver une infinité de solutions de l'équation indéterminée

$$(P^2 + Q^2 + R^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) = U^2 + V^2.$$

Il suffit d'y remplacer x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'', par des nombres satisfaisant aux relations (1).

Pour la première, on cherchera trois carrés, dont la somme soit un carré, soit $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$; on pourra prendre

$$x = \pm\frac{a}{d}, \quad y = \pm\frac{b}{d}, \quad z = \pm\frac{c}{d}.$$

Les deux dernières équations permettront de trouver sans peine autant de systèmes qu'on voudra de valeurs correspondantes de x', y', z'; x'', y'', z''.

Ainsi, en prenant

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}, & y &= \frac{2}{3}, & z &= \frac{1}{3}, \\ x' &= -4, & y' &= 3, & z' &= 2, \\ x'' &= -20, & y'' &= -15, & z'' &= -17, \end{aligned}$$

on aura, en multipliant les deux membres de la relation par 3^2,

$$(4^2 + 3^2 + 2^2)(10^2 + 19^2 + 14^2) = 3^2 + 138^2.$$

Note du Rédacteur. — La même question a été résolue par MM. Demartres; J. Mister, répétiteur d'Analyse à l'École du Génie civil de Belgique; Niewenglowski, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Reims; Launoy, maître auxiliaire au lycée de Lille.

Question 1125

(voir même tome, p. 200);

PAR M. CHARLES CHABANEL.

Sur les arêtes d'un trièdre trirectangle on peut, et d'une infinité de manières, prendre trois longueurs OA, OB, OC, *en nombres entiers, telles que l'aire du* *triangle* ABC *soit elle-même mesurée par un nombre entier, ainsi que les trois autres faces du tétraèdre résultant* OABC. (A. TRANSON.)

Soit

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \tag{1}$$

l'équation d'une sphère ayant le point O pour centre, et rapportée aux trois arêtes du trièdre trirectangle, comme axes de coordonnées.

Le plan tangent à cette sphère en un point (x_0, y_0, z_0) a pour équation

$$xx_0+yy_0+zz_0=r^2,$$

et coupe les axes des coordonnées en des points A, B, C, situés à des distances a, b, c du point O, distances telle que l'on a

$$x_0=\frac{r^2}{a},\quad y_0=\frac{r^2}{b},\quad z_0=\frac{r^2}{c}.$$

Le point (x_0, y_0, z_0) appartient à la sphère déterminée par l'équation (1) ; on a, par conséquent,

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{r^2}. \tag{2}$$

Le volume V du tétraèdre OABC a pour expression

$$V=\frac{abc}{6};$$

mais si l'on appelle s l'aire du triangle ABC, on a aussi

$$V=\frac{rs}{3}:$$

d'où

$$\frac{abc}{6}=\frac{rs}{3} \quad \text{et} \quad r=\frac{abc}{2s}.$$

Par suite, l'équation (2) devient

$$(3) \qquad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{4s^2}{a^2 b^2 c^2},$$

équation qu'il faut vérifier en donnant à a, b, c, s des valeurs entières.

L'identité

$$(4) \qquad (x^2 + y^2 - z^2)^2 + 4x^2z^2 + 4y^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

conduit à ce résultat.

En posant d'abord

$$\frac{1}{a} = x^2 + y^2 - z^2, \quad \frac{1}{b} = 2xz, \quad \frac{1}{c} = 2yz,$$

d'où

$$a = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}, \quad b = \frac{1}{2xz}, \quad c = \frac{1}{2yz},$$

les valeurs de a, b, c, s seront rationnelles. On rendra ces valeurs entières en multipliant les expressions de a, b, c par le produit $4xyz\,(x^2 + y^2 - z^2)$; on aura ainsi

$$a = 4xyz, \quad b = 2y\,(x^2 + y^2 - z^2), \quad c = 2x\,(x^2 + y^2 - z^2),$$

et au moyen de l'équation (3),

$$s = 2xy\,(x^2 + y^2 - z^2)\,(x^2 + y^2 + z^2).$$

Quant aux aires des faces autres que celle opposée au sommet du trièdre trirectangle, elles seront évidemment mesurées par des nombres entiers.

Les nombres entiers x, y, z sont indétérminés; ils sont soumis à cette seule condition que le nombre $x^2 + y^2 - z^2$ soit différent de zéro. Par conséquent, le nombre des solutions est infini.

Note du Rédacteur. — M. Moret-Blanc a démontré, d'une manière peu différente, que la question admet une infinité de solutions.

M. Moreau a trouvé les mêmes formules

$$a = 4xyz, \quad b = 2y(x^2+y^2-z^2), \quad c = 2x(x^2+y^2-z^2),$$
$$s = 2xy(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2+z^2).$$

Si, dans les expressions de b et de c, on pose $z = x - y$, il viendra

$$b = 4xy^2, \quad c = 4yx^2, \quad (c-b) = 4xy(x-y) = 4xyz = a,$$

d'où

$$c = a + b.$$

Donc, *si l'on prend sur deux arêtes d'un trièdre trirectangle des longueurs* OA, OB *mesurées par des nombres pairs quelconques, et sur la troisième arête une longueur* OC *égale à la somme des deux premières, les quatre faces du tétraèdre résultant* OABC *seront mesurées par des nombres entiers.*

Cette proposition m'a été communiquée par M. A. Transon. (G.)

Question 1138

(voir même tome, p. 208);

PAR M. DE RUFZ DE LAVISON,

Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Painvin).

Dans un quadrilatère sphérique, deux côtés opposés sont fixes de directions et variables de grandeur, et les deux autres sont variables de directions, mais ils ont une grandeur égale à $\frac{\pi}{2}$. Trouver le lieu du point de rencontre des diagonales. (BOURGUET.)

Rapportons la figure à un triangle sphérique trirectangle dont deux des côtés soient les arcs de grand cercle bissecteurs des deux côtés fixes.

Les équations des arcs de grand cercle donnés seront

$$(1) \qquad ax + by = 0, \qquad ax - by = 0;$$

les équations des deux autres côtés seront

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \qquad \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0.$$

Les coordonnées des sommets A, B, C, D seront donc définies par les équations

$$\text{(A)}\qquad \frac{x}{b} = -\frac{y}{a} = \frac{z}{\frac{1}{\gamma}(a\beta - b\alpha)},$$

$$\text{(B)}\qquad \frac{x}{b} = \frac{y}{a} = \frac{-z}{\frac{1}{\gamma}(a\beta + b\alpha)},$$

$$\text{(C)}\qquad \frac{x}{b} = \frac{y}{a} = \frac{-z}{\frac{1}{\gamma_1}(a\beta_1 + b\alpha_1)},$$

$$\text{(D)}\qquad \frac{x}{b} = \frac{-y}{a} = \frac{z}{\frac{1}{\gamma_1}(a\beta_1 - b\alpha_1)}.$$

Le cosinus de la distance sphérique δ de deux points dont les coordonnées sphériques sont x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 est donné par la formule

$$\cos\delta = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2;$$

dans cette formule, x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 représentent les sinus des arcs de grand cercle perpendiculaires aux trois côtés du triangle, abaissés des points considérés. Pour que cette distance soit égale à $\frac{\pi}{2}$ il faut que l'on ait

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

Exprimons dans le cas actuel que AB et CD sont égaux à $\frac{\pi}{2}$, nous aurons les conditions

$$\text{(2)}\qquad \left\{\begin{aligned} & b^2 - a^2 - \frac{1}{\gamma^2}(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2) = 0, \\ & b^2 - a^2 - \frac{1}{\gamma_1^2}(a^2\beta_1^2 - b^2\alpha_1^2) = 0. \end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, les équations des diagonales AC et BD seront

$$(3)\quad \begin{cases} (\mathrm{AC}) \begin{vmatrix} x & y & z \\ b & -a & \dfrac{1}{\gamma}(a\beta - b\alpha) \\ b & a & -\dfrac{1}{\gamma_1}(a\beta_1 + b\alpha_1) \end{vmatrix} = 0, \\ (\mathrm{BD}) \begin{vmatrix} x & y & z \\ b & -a & \dfrac{1}{\gamma_1}(a\beta_1 - b\alpha_1) \\ b & a & -\dfrac{1}{\gamma}(a\beta + b\alpha) \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Pour avoir l'équation du lieu il faut éliminer $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\alpha_1}{\gamma_1}, \frac{\beta_1}{\gamma_1}$ entre les équations (2) et (3); la question est donc en apparence indéterminée. Cette indétermination apparente s'explique facilement si l'on considère que le quadrilatère n'est assujetti qu'à trois conditions.

Je remarquerai d'abord que, dans ces relations, il n'entre comme indéterminées que les quantités

$$\frac{a\beta - b\alpha}{\gamma}, \quad \frac{a\beta + b\alpha}{\gamma}, \quad \frac{a\beta_1 - b\alpha_1}{\gamma_1}, \quad \frac{a\beta_1 + b\alpha_1}{\gamma_1},$$

et je poserai alors

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{a\beta_1 - b\alpha_1}{\gamma_1} = p_1, & \dfrac{a\beta_1 + b\alpha_1}{\gamma_1} = q_1, \\ \dfrac{a\beta - b\alpha}{\gamma} = p, & \dfrac{a\beta + b\alpha}{\gamma} = q. \end{cases}$$

Les équations (2) et (3) s'écrivent alors, en développant les dernières,

$$(5)\qquad pq = p_1 q_1 = b^2 - a^2,$$

$$(6)\qquad \begin{cases} 2abz - p(ax - by) + q_1(ax + by) = 0, \\ 2abz - p_1(ax - by) + q(ax + by) = 0. \end{cases}$$

En retranchant membre à membre les équations (6), respectivement multipliées par q et q_1, il vient, eu égard aux relations (5),

$$2ab(q - q_1)z = 0, \qquad \text{ou} \qquad z = 0;$$

le lieu est donc le grand cercle dont le pôle est le point de concours des deux côtés donnés.

Note. — Une autre solution *analytique* a été donnée par M. Moret-Blanc.

La Géométrie élémentaire conduit au même résultat. — Supposez qu'à l'intersection M des diagonales AC, BD du quadrilatère sphérique ABCD on mène des tangentes aux arcs AC, BD, et du centre O de la sphère les rayons OA, OC, OB, OD qui, prolongés, rencontrent la première tangente en des points a, c, et la seconde en b, d. Le quadrilatère plan $abcd$ sera un trapèze dont les côtés parallèles seront ad, bc. En effet, l'angle aOb mesuré par l'arc AB étant droit, on a

$$\overline{ab}^2 = \overline{Oa}^2 + \overline{Ob}^2 = \overline{Ma}^2 + \overline{Mb}^2 + 2\overline{OM}^2;$$

mais le triangle rectiligne aMb donne

$$\overline{ab}^2 = \overline{Ma}^2 + \overline{Mb}^2 - 2Ma.Mb.\cos aMb:$$

d'où

$$Ma.Mb.\cos aMb = -\overline{OM}^2.$$

De même,

$$Mc.Md.\cos cMd = -\overline{OM}^2.$$

Donc

$$MaMb = McMd, \quad \frac{Ma}{Md} = \frac{Mc}{Md};$$

et de là le parallélisme des droites ad, bc.

Il s'ensuit que le diamètre FG, de la sphère, suivant lequel se coupen les plans Oad, Obc des arcs de grand cercle AD, BC, est parallèle au plan $abcd$ tangent à la sphère au point M; donc l'angle FOM est droit, et l'arc de grand cercle FM qui mesure cet angle est un quadrant; par conséquent, le lieu du point M est l'arc de grand cercle décrit du point F comme pôle. (G.)

Question 1141

(voir même tome, p. 208);

PAR M. J. MARQUET,
Professeur au Mans.

On considère deux tangentes fixes AC, BC *aux points* A, B *d'une conique fixe.* C *est le point de rencontre des tangentes,* AB *est la corde des contacts.*

Par chacun des points A *et* B *on mène une sécante quelconque; elles rencontrent la conique en* μ *et* ν *respectivement. Les droites* $A\mu$, $A\nu$ *coupent la tangente* BC *en* M *et* N; *les droites* $B\mu$, $B\nu$ *coupent la tangente* AC *en* M' *et* N'. *Ceci admis, on a les deux propriétés suivantes :*

1° *Le rapport anharmonique des quatre points* A, C, M', N' *est égal à celui des quatre points* C, B, M, N;

2° *Les quatre droites* AB, $\mu\nu$, MN', M'N *passent par un même point.*

(L. PAINVIN.)

Soient $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ les équations des tangentes CB, CA et de la corde des contacts AB; l'équation de la conique pourra s'écrire

$$XY-\lambda Z^2=0,$$

et les droites AM, AN, BM', BN' seront représentées par

$$Y-\mu Z=0,\quad Y-\nu Z=0,\quad X-\mu' Z=0,\quad X-\nu' Z=0,$$

où μ, ν, μ', ν' désignent des paramètres variables, satisfaisant, toutefois, aux conditions

$$(1)\qquad \mu\mu'=\nu\nu'=\lambda,$$

qui doivent être remplies pour que les droites AM, BM', et AN, BN' se coupent sur la conique.

Les quatre droites AC, AB, AM, AN, ou

$$Y = o, Z = o, Y - \mu Z = o, Y - \nu Z = o,$$

forment un faisceau dont le rapport anharmonique est $\frac{\mu}{\nu}$;
Le faisceau formé des quatre droites

$$BA, BC, BM', BN',$$

ou

$$Z = o, \quad X = o, \quad Z - \frac{1}{\mu'} X = o, \quad Z - \frac{1}{\nu'} X = o,$$

a pour rapport anharmonique $\frac{1}{\mu'} : \frac{1}{\nu'} = \frac{\nu'}{\mu'}$.

Mais l'égalité (1) $\mu\mu' = \nu\nu'$ donne $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\nu'}{\mu'}$; donc ces deux faisceaux ont le même rapport anharmonique, et par conséquent :

1° *Le rapport anharmonique des quatre points* A, C, M', N' *est égal à celui des quatre points* C, B, M, N.

Les coordonnées des points

$$M, N, M', N', \mu, \nu,$$

vérifient, respectivement, les systèmes d'équations

$$(X = o, \quad Y - \mu Z = o), \quad (X = o, \quad Y - \nu Z = o),$$
$$(Y = o, \quad X - \mu' Z = o), \quad (Y = o, \quad X - \mu' Z = o),$$
$$(Y - \mu Z = o, \quad X - \mu' Z = o),$$
$$(Y - \nu Z = o, \quad X - \nu' Z = o),$$

qui représentent des systèmes de deux droites auxquelles ces points appartiennent. On en peut conclure, en ayant égard aux conditions $\mu\mu' = \nu\nu' = \lambda$, que les équations des quatre droites MN', M'N, $\mu\nu$, AB sont

$$Y + \frac{\mu\nu}{\lambda} X - \mu Z = o,$$

$$Y + \frac{\mu\nu}{\lambda} X - \nu Z = o, \quad Y + \frac{\mu\nu}{\lambda} X - (\mu + \nu) Z = o, \quad Z = o;$$

or, ces équations sont vérifiées par $Y + \frac{\mu\nu}{\lambda} X = 0$, et $Z = 0$; donc :

2° *Les quatre droites* AB, $\mu\nu$, MN′, M′N *passent par un même point.*

Note du Rédacteur. — M. Marquet a donné de cette question une seconde solution fondée sur les propriétés des faisceaux homographiques et sur l'hexagone de Pascal.

La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Louis Goulin, élève en Mathématiques élémentaires au lycée du Havre; B. Launoy, maître auxiliaire au lycée de Lille.

Question 1147

(voir 2e série, t. XIII, p. 304);

PAR M. LEZ.

On donne, sur un même plan, deux cercles fixes A, B *et le rayon* ρ *d'un troisième cercle* C *mobile et tangent extérieurement au cercle* A. Trouver l'enveloppe de *l'axe radical des circonférences* B *et* C.

(HARKEMA.)

En supposant l'origine des coordonnées au centre du cercle A, et l'axe des X passant par le centre de l'autre cercle B, ces cercles pourront être représentés, le premier par $x^2 + y^2 = R^2$, le second par $(x - d)^2 + y^2 = r^2$. Le cercle mobile C aura aussi pour équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2,$$

en remarquant que les coordonnées variables α, β de son centre sont liées par la relation

$$(1) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = (R + \rho)^2.$$

Or on sait que l'axe radical de deux cercles est la droite passant par leurs points d'intersection; l'axe radical des cercles B et C est donc représenté par

$$(2) \qquad \rho^2 - r^2 = \alpha^2 - d^2 + \beta^2 - 2(\alpha - d)x - 2\beta y.$$

Pour trouver l'enveloppe de cette droite mobile, il suffit d'éliminer les variables (α, β) entre les équations (1), (2) et la condition $\varphi'_\alpha \times F'_\beta = \varphi'_\beta \times F'_\alpha$ traduite par $\alpha y = \beta x$.

Les équations (1) et (2) deviennent ainsi

$$\beta^2(x^2+y^2) - y^2(R^2+\rho^2+2R\rho) = 0,$$

$$\beta^2(x^2+y^2) - 2\beta(x^2+y^2)y - y^2(\rho^2+d^2-r^2-2dx) = 0;$$

ce qui donne, après l'élimination de β,

$$(3)\left\{\begin{array}{l} 4[(R+\rho)^2-d^2]x^2+4(R+\rho)^2y^2-4dx(R^2+r^2+2R\rho-d^2) \\ \quad = (R^2+r^2+2R\rho-d^2)^2. \end{array}\right.$$

C'est une équation du second degré facile à discuter; elle représente une des sections coniques suivant la valeur du coefficient $(R+\rho)^2 - d^2$. En faisant $y = 0$, on a les points où la courbe coupe l'axe des X; on obtient ainsi

$$x_1 = \frac{R^2+r^2+2R\rho-d^2}{2(R+\rho-d)} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{(R^2+r^2+2R\rho-d^2)}{2(R+\rho+d)}.$$

Pour $d = 0$ l'équation (3) représente un cercle concentrique au cercle A.

Pour $d = R+\rho$, x_1 devient infini, $x_2 = -\dfrac{(r^2-\rho^2)}{4(R+\rho)}$. Le lieu est une parabole qui, rapportée à la tangente au sommet, a pour équation $y^2 = \dfrac{(r^2-\rho^2)x}{R+\rho}$; le centre du cercle A est donc le foyer de cette parabole.

Quand d n'est pas égal à $R+\rho$, la courbe a un centre sur l'axe des X, à une distance du centre du cercle A égale à $\dfrac{d(R^2+r^2+2R\rho-d^2)}{2(R^2+r^2+2R\rho-d^2)}$, et suivant qu'on a $d < R+\rho$, ou $d > R+\rho$, cette courbe est une ellipse ou une hyperbole, dont un des foyers est le centre du cercle A.

Nota. — La même question a été résolue par M. J. Derousseau, élève du Collége industriel et littéraire de Verviers, cours de M. Ledent; et par

M. Momy, élève en Mathématiques spéciales au Lycée de Bordeaux, classe de M. de Lagrandval.

M. Momy a, de plus, étendu la question à l'espace en substituant des sphères aux cercles, et un plan à une droite.

L'enveloppe du plan radical des sphères B et C est une surface du second degré, représentée par une équation dont la discussion n'offre aucune difficulté.