LIONNET

Note sur une question de géométrie élémentaire

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 331-334
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__331_0>

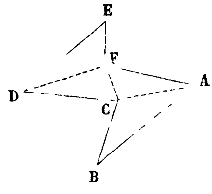
NOTE SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

Par M. LIONNET.

1. On sait qu'un polygone plan, rectiligne et convexe, dont tous les angles sont moindres que deux droits et d'un nombre n de côtés supérieur à 3, est décomposable en $n - 2$ triangles. Pour étendre ce théorème à un polygone non convexe, on a donné jusqu'ici des démonstrations qui laissent à désirer sous le rapport de la rigueur. Afin d'établir que la somme des angles d'un polygone non convexe égale $2n - 4$ angles droits, M. Briot, dans la sixième édition de sa *Géométrie élémentaire,* démontre le théorème relatif à la décomposition du polygone en triangles, de la manière suivante :

On forme un premier triangle ABC (*fig.* 1) avec deux

Fig. 1.



côtés du polygone et une diagonale AC; un deuxième triangle ACF avec cette diagonale, un côté AF du polygone et une nouvelle diagonale CF; puis un troisième triangle CDF avec cette diagonale, un côté CD du polygone et une nouvelle diagonale DF. Le dernier triangle DEF est formé, comme le premier ABC, par une diagonale et deux côtés du polygone.

Si ces constructions successives étaient toujours *évidemment possibles*, le théorème serait démontré ; mais il suffit de jeter les yeux sur la *fig.* 2 pour se convaincre du contraire.

2. Avant de donner une démonstration rigoureuse, il est bon d'observer que, par le mot *polygone*, nous entendrons parler d'une *seule* surface plane terminée par une ligne brisée dont chaque angle est compris entre zéro et quatre droits.

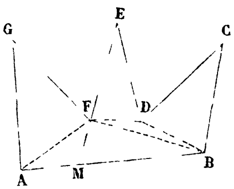
Une diagonale sera dite *intérieure*, quand tous ses points, autres que ses extrémités, seront intérieurs au polygone.

Telles sont toutes les diagonales d'un polygone convexe dont chaque angle est moindre que deux droits. Telles sont aussi, dans un polygone convexe dont un ou plusieurs angles égalent deux droits, les diagonales menées du sommet de l'un quelconque de ces angles aux sommets situés hors de la direction de ses côtés.

3. Théorème I. — *Tout polygone* P *d'un nombre* n *de côtés supérieur à* 3 *peut être décomposé en* $n-2$ *triangles par* $n-3$ *diagonales.*

On sait que, dans tout polygone convexe (2), on peut mener au moins une diagonale intérieure. Afin de prouver qu'il en est de même dans un polygone non convexe ABCDEFG, lequel a au moins un angle F plus grand que deux droits, prolongeons l'un quelconque EF des côtés de cet angle dans l'intérieur du polygone jusqu'à la rencontre du contour en un point M. Si ce point était un sommet du polygone, la droite FM serait une diagonale intérieure. Dans le cas contraire, concevons que cette droite FM, d'une longueur variable, tourne autour du point F dans un sens tel que son extrémité M décrive la ligne brisée MBCDE; cette droite restera intérieure au polygone jusqu'à ce qu'elle ait

Fig. 2.



rencontré un ou plusieurs sommets de la ligne brisée. Si elle rencontre d'abord le seul sommet B, elle sera, dans la position FB, une diagonale intérieure; si elle rencontrait en même temps les sommets B et D, chacune des droites FD, BD serait une diagonale intérieure; donc, etc.

Cela étant, supposons que le théorème I soit vrai pour tout polygone d'un nombre de côtés inférieur à n, et proposons-nous de démontrer qu'il l'est aussi pour un polygone de n côtés. Une diagonale intérieure divisera le contour de ce polygone en deux lignes brisées, l'une de n', et l'autre de n'' côtés, $n'+n''$ étant égal à n, et le polygone P en deux autres P′ et P″ dont les nombres de côtés $n'+1$ et $n''+1$ seront moindres que n. Donc, en vertu de la supposition, P′ et P″ seront décomposables, l'un en $n'-1$ triangles par $n'-2$ diagonales, et l'autre en $n''-1$ triangles par $n''-2$ diagonales; donc enfin P pourra être décomposé en $n'+n''-2$ ou $n-2$ triangles par $n'+n''-4+1$ ou $n-3$ diagonales; mais ce principe peut être considéré comme exact pour un triangle, puisqu'alors $n-2=1$ et $n-3=0$; donc il est vrai pour un quadrilatère, puis pour un pentagone, et ainsi de suite.

4. THÉORÈME II. — *La somme des angles d'un polygone de n côtés n'excède pas $2n - 4$ angles droits.*

Legendre a démontré que la somme des angles d'un triangle n'excède pas deux droits. Or la somme des angles d'un polygone de n côtés est visiblement égale à celle de tous les angles des $n - 2$ triangles dont il se compose (3); donc la somme des angles du polygone n'excède pas $2(n - 2)$ ou $2n - 4$ angles droits.

Dans la Géométrie euclidienne, cette somme vaut $2n - 4$ droits : elle est moindre que $2n - 4$ dans la Géométrie non euclidienne.

Corollaire. — Dans tous les cas, *trois au moins des angles du polygone sont plus petits que deux droits.* Car si un polygone de n côtés avait moins de trois angles plus petits que deux droits, il aurait au moins $n - 2$ angles égaux ou supérieurs à deux droits, et, par suite, une somme d'angles plus grande que $2n - 4$ angles droits, ce qui est impossible.