Nouvelles annales de mathématiques

H. Lemonnier

Note sur la détermination des foyers dans les lignes du second degré et dans les surfaces de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 318-330

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__318_1>

NOTE

sur la détermination des foyers dans les lignes du second degré et dans les surfaces de révolution ;

Par M. H. LEMONNIER,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

I.

1. Supposons les axes rectangulaires. Soit

$$f(xy) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation de la conique. Si x_1 et y_1 sont les coordonnées d'un foyer, on aura

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (mx + ny + p)^2,$$

d'où l'on conclut identiquement

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (mx + ny + p)^2 = \lambda f,$$

ou bien

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - \lambda f = (mx + ny + p)^2.$$

Il s'agit donc d'avoir, en

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - \lambda(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F),$$

le carré d'une fonction u du premier degré en x et y; or, en rendant la fonction homogène en x, y et $z = 1$, cela aura lieu si les trois dérivées u'_x, u'_y, u'_z ont leurs coefficients proportionnels. Les demi-dérivées sont

$$\begin{gathered} x - x_1 - \lambda\,(Ax + By + D), \\ y - y_1 - \lambda\,(Bx + Cy + E), \\ -x_1(x - x_1) - y_1(y - y_1) - \lambda(Dx + Ey + F); \end{gathered}$$

d'où

$$\frac{1 - \lambda A}{-\lambda B} = \frac{-\lambda B}{1 - \lambda C} = \frac{-x_1 - \lambda D}{-y_1 - \lambda E},$$

$$\frac{1 - \lambda A}{-x_1 - \lambda D} = \frac{-\lambda B}{-y_1 - \lambda E} = \frac{-x_1 - \lambda D}{x_1^2 + y_1^2 - \lambda F},$$

$$\frac{-\lambda B}{-x_1 - \lambda D} = \frac{1 - \lambda C}{-y_1 - \lambda E} = \frac{-y_1 - \lambda E}{x_1^2 + y_1^2 - \lambda F};$$

puis on a

$$mx + ny + p = \frac{x - x_1 - \lambda(Ax + By + D)}{\sqrt{1 - \lambda A}},$$

Les équations de condition donnent d'abord

$$(1 - \lambda A)(1 - \lambda C) - \lambda^2 B^2 = 0.$$

Posons $\lambda = \frac{1}{S}$: c'est

$$(A - S)(C - S) - B^2 = 0;$$

et il vient

$$\frac{A - S}{B} = \frac{B}{C - S} = \frac{Sx_1 + D}{Sy_1 + E},$$

$$\frac{A - S}{Sx_1 + D} = \frac{B}{Sy_1 + E} = \frac{Sx_1 + D}{-(x_1^2 + y_1^2)S + F},$$

$$\frac{B}{Sx_1 + D} = \frac{C - S}{Sy_1 + E} = \frac{Sy_1 + E}{-(x_1^2 + y_1^2)S + F};$$

on déduit de la première ligne

$$\frac{A - S}{B} = \frac{B}{C - S} = \frac{Sx_1 + D}{Sy_1 + E} = \frac{Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + Cy_1 + E},$$

de sorte que $\frac{f'_{x_1}}{A - S} = \frac{f'_{y_1}}{B}$.

L'équation $(A - S)(C - S) - B^2 = 0$ est connue; elle a ses racines réelles. Pour chacune, il y a un axe donné par l'équation $\frac{f'_x}{A - S} = \frac{f'_y}{B}$ ou par $\frac{f'_x}{B} = \frac{f'_y}{C - S}$, qui passe à l'infini, quand S est nul.

Pour chaque valeur de $S \gtrless 0$, on aura deux foyers donnés par

$$\frac{A - S}{B} = \frac{B}{C - S} = \frac{Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + Cy_1 + E},$$

et

$$(x_1^2 + y_1^2)S - F = -\frac{(Sx_1 - D)^2}{A - S},$$

ou

$$(x_1^2 + y_1^2)S - F = -\frac{(Sy_1 + E)^2}{C - S},$$

ou

$$(x_1^2 + y_1^2)S - F = -\frac{(Sx_1 + D)(Sy_1 + E)}{B},$$

de sorte que l'on a

$$(x_1^2 + y_1^2)S - F = -\frac{(Sx_1 + D)^2}{A - S} = -\frac{(Sy_1 + E)^2}{C - S}$$
$$= -\frac{(Sx_1 + D)(Sy_1 + E)}{B},$$

d'où l'équation d'un cercle par

$$(x_1^2 + y_1^2)S - F = -\frac{(Sx_1 + D)^2 + (Sy_1 + E)^2}{A + C - 2S},$$

ou par

$$S(A + C - S)(x_1^2 + y_1^2) + 2S(Dx_1 + Ey_1 + F)$$
$$+ D^2 + E^2 - (A + C)F = 0.$$

Au cas de la parabole, la racine $S = 0$ donne un axe à l'infini, ainsi que le centre; il n'y correspond aucun foyer. L'autre racine $S = A + C$ donne un seul foyer par la rencontre de l'axe et de la droite qui a pour équation

$$2(A + C)(Dx_1 + Ey_1 + F) + D^2 + E^2 - (A + C)F = 0,$$

2. Quand les coordonnées sont obliques, on doit avoir

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + 2(x - x_1)(y - y_1)\cos\theta$$
$$- \frac{1}{S}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F) = (mx + ny + p)^2.$$

Les demi-dérivées à rendre proportionnelles entre elles sont

$$x - x_1 + (y - y_1)\cos\theta - \frac{1}{S}(Ax + By + D),$$

$$y - y_1 + (x - x_1)\cos\theta - \frac{1}{S}(Bx + Cy + E),$$

$$-x_1(x - x_1) - y_1(y - y_1) - x_1(y - y_1)\cos\theta - y_1(x - x_1)\cos\theta$$
$$- \frac{1}{S}(Dx + Ey + F).$$

Il s'ensuit

$$\frac{A-S}{B-S\cos\theta}=\frac{B-S\cos\theta}{C-S}=\frac{(x_1+y_1\cos\theta)S+D}{x_1\cos\theta+y_1+E},$$

$$\frac{A-S}{(x_1+y_1\cos\theta)S+D}=\frac{B-S\cos\theta}{(y_1+x_1\cos\theta)S+E}=\frac{(x_1+y_1\cos\theta)S+D}{-(x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\theta)S+F},$$

$$\frac{B-S\cos\theta}{(x_1+y_1\cos\theta)S+D}=\frac{C-S}{(y_1+x_1\cos\theta)S+E}=\frac{(x_1\cos\theta+y_1)S+E}{-(x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\theta)S+F},$$

de sorte que l'on a

$$(A-S)(C-S)-(B-S\cos\theta)^2=0,$$

$$\frac{A-S}{B-S\cos\theta}=\frac{B-S\cos\theta}{C-S}=\frac{Ax_1+By_1+D}{Bx_1+Cy_1+E},$$

$$\begin{aligned}
&(x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\theta)S-F\\
&=-\frac{[(x_1+y_1\cos\theta)S+D]^2}{A-S}=-\frac{[(x_1\cos\theta+y_1)S+E]^2}{C-S}\\
&=-\frac{[(x_1+y_1\cos\theta)S+D][(y_1+x_1\cos\theta)S+E]}{B-S\cos\theta}\\
&=-\frac{\begin{array}{c}[(x_1+y_1\cos\theta)S+D]^2+[(x_1\cos\theta+y_1)S+E]^2\\-2\cos\theta[(x_1+y_1\cos\theta)S+D][(y_1+x_1\cos\theta)S+E]\end{array}}{(A-S)+(C-S)-2\cos\theta(B-S\cos\theta)}\\
&=-\frac{\begin{array}{c}\sin^2\theta[(x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\theta)S+2Dx_1+2Ey_1]S\\+D^2+E^2-2DE\cos\theta\end{array}}{A+C-2B\cos\theta-2S\sin^2\theta},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&S(A+C-2B\cos\theta-S\sin^2\theta)(x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\theta)\\
&\quad+2S\sin^2\theta(Dx_1+Ey_1+F)+D^2+E^2-2DE\cos\theta\\
&\qquad\qquad-(A+C-2B\cos\theta)F=0.
\end{aligned}$$

Nota. On aura, au lieu d'un foyer, un cercle doublement tangent à la conique, par l'équation

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-r^2=0$$

si les coordonnées sont rectangulaires, et par l'équation

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+2(x-x_1)(y-y_1)\cos\theta-r^2=0$$

s'il en est autrement, en mettant $F + r^2 S$ à la place de F, ce qui donne dans un cas

$$(x_1^2 + y_1^2 - r^2)S - F = -\frac{(Sx_1 + D)^2}{A - S} = -\frac{(Sy_1 + E)^2}{C - S}$$
$$= -\frac{(Sx_1 + D)(Sy_1 + E)}{B},$$

ou

$$S(A + C - S)(x_1^2 + y_1^2) + 2S(Dx_1 + Ey_1 + F + r^2 S)$$
$$+ D^2 + E^2 - (A + C)(F + r^2 S) = o,$$
$$= S(A + C - S)(x_1^2 + y_1^2 - r^2) + r^2 S^2 + 2S(Dx_1 + Ey_1 + F)$$
$$+ D^2 + E^2 - (A + C)F = o,$$

et, dans l'autre cas,

$$(x_1^2 + y_1^2)2x_1 y_1 \cos\theta - r^2) S - F$$
$$= -\frac{[(x_1 + y_1 \cos\theta)S + D]^2}{A - S} = -\frac{[(x_1 \cos\theta + y_1)S + E]^2}{C - S}$$
$$= -\frac{[(x_1 + y_1 \cos\theta)S + D][(y_1 + x_1 \cos\theta)S + E]}{B - S\cos\theta},$$

ou

$$S(A + C - 2B\cos\theta - S\sin^2\theta)(x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 y_1 \cos\theta - r^2)$$
$$+ S^2 r^2 \sin^2\theta + 2S\sin^2\theta(Dx_1 + Ey_1 + F) + D^2 + E^2$$
$$- (A + C - 2B\cos\theta)F = o.$$

II.

Autre détermination des foyers.

Prenons pour déterminer les foyers cette propriété bien connue, que la droite qui joint tout point (xy) d'une directrice à un foyer $(x_1 y_1)$ correspondant est perpendiculaire à sa polaire, passant par ce foyer. On a immédiatement par cette propriété, si les coordonnées sont rectangulaires,

$$xf'_{1x_1} + yf'_{1y_1} + f'_{1z_1} = 0$$

et

$$\frac{x_1 - x}{f'_x} = \frac{y_1 - y}{f'_y} = -\frac{1}{2S},$$

de là

$$\begin{gathered} Ax + By + D + S(x_1 - x) = 0, \\ Bx + Cy + E + S(y_1 - y) = 0, \\ xf'_{1x_1} + yf'_{1y_1} + zf'_{1z_1} = 0. \end{gathered}$$

Il s'ensuit

$$\begin{vmatrix} A - S & B & D + Sx_1 \\ B & C - S & E + Sy_1 \\ f'_{1x_1} & f'_{1y_1} & f'_{1z_1} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui apprend que S ne varie pas avec (x et y).

Par conséquent, la polaire du foyer x_1 y_1 est donnée par chacune des équations

$$\begin{gathered} (A - S)x + By + D + Sx_1 = 0, \\ Bx + (C - S)y + E + Sy_1 = 0, \\ f'_{1x_1}x + f'_{1y_1}y + f'_{1z_1} = 0; \end{gathered}$$

de sorte que les coefficients y sont proportionnels entre eux. On a ainsi

$$\begin{gathered} \frac{A - S}{B} = \frac{B}{C - S} = \frac{D + Sx_1}{E + Sy_1}, \\ \frac{A - S}{f'_{1x_1}} = \frac{B}{f'_{1y_1}} = \frac{D + Sx_1}{f'_{1z_1}}, \\ \frac{B}{f'_{1x_1}} = \frac{C - S}{f'_{1y_1}} = \frac{E + Sy_1}{f'_{1z_1}}. \end{gathered}$$

D'après quoi

$$(A - S)(C - S) - B^2 = 0,$$

même équation que ci-dessus.

Pour une valeur de S, on a, si elle est différente de zéro, un axe par

$$\frac{A-S}{B}=\frac{B}{C-S}=\frac{D+Sx_1}{E+Sy_1}=\frac{f'_{1x_1}}{f'_{1y_1}}.$$

Les foyers correspondants sont déterminés par cette équation et par

$$(A-S)f'_{1z_1}=(D+Sy_1)f'_{1x_1}, \text{ ou } (C-S)f'_{1z_1}=(E+Sy_1)f'_{1y_1}$$

ou

$$Bf'_{1z_1}=(D+Sy_1)f'_{1y_1}=(E+Sy_1)f'_{1x_1},$$

résultats qui peuvent du reste se déduire de ceux du § I.

2. Quand les coordonnées sont obliques, les équations du problème sont

$$xf'_{1x_1}+yf'_{1y_1}+f'_{1z_1}=0,$$

$$\frac{x_1-x+(y_1-y)\cos\theta}{f'_x}=\frac{y_1-y+(x_1-x)\cos\theta}{f'_y}=-\frac{1}{2S},$$

d'où

$$Ax+By+D+[x_1-x+(y_1-y)\cos\theta]S=0,$$
$$Bx+Cy+E+[(x_1-x)\cos\theta+y_1-y]S=0,$$
$$f'_{1x_1}x+f'_{1y_1}y+f'_{1z_1}z=0;$$

d'où

$$\begin{vmatrix} A-S & B-S\cos\theta & D+(x_1+y_1\cos\theta)S \\ B-S\cos\theta & C-S & E+(x_1\cos\theta+y_1)S \\ f'_{1x_1} & f'_{1y_1} & f'_{1z_1} \end{vmatrix}=0,$$

de sorte que S est indépendant de x et y sur la directrice.

Il s'ensuit

$$\frac{A-S}{B-S\cos\theta}=\frac{B-S\cos\theta}{C-S}=\frac{(x_1+y_1\cos\theta)S+D}{(x_1\cos\theta+y_1)S+E},$$

$$\frac{A-S}{f'_{1x_1}}=\frac{B-S\cos\theta}{f'_{1y_1}}=\frac{(x_1+y_1\cos\theta)S+D}{f'_{1z_1}},$$

$$\frac{B-S\cos\theta}{f'_{1x_1}}=\frac{C-S}{f'_{1y_1}}=\frac{(x_1\cos\theta+y_1)S+E}{f'_{1z_1}}.$$

On a ainsi

$$(A-S)(C-S)-(B-S\cos\theta)^2=0,$$

$$\frac{A-S}{B-S\cos\theta}=\frac{B-S\cos\theta}{C-S}=\frac{(x_1+y_1\cos\theta)S+D}{(x_1\cos\theta+y_1)S+E}=\frac{f'_{1x_1}}{f'_{1y_1}},$$

équation d'un axe, et

$$(A-S)f'_{1z_1}=[(x_1+y_1\cos\theta)S+D]f'_{1x_1},$$

ou

$$(C-S)f'_{1z_1}=[(x_1\cos\theta+y_1)S+E]f'_{1y_1},$$

ou

$$(B-S\cos\theta)f'_{1z_1}=[(x_1+y_1\cos\theta)S+D]f'_{1y_1}$$
$$=[(x_1\cos\theta+y_1)S+E]f'_{1x_1}.$$

III.

I. En étendant la dernière méthode aux surfaces du second degré, on obtient aisément, avec les conditions requises pour que la surface soit de révolution, les équations de l'axe de révolution et celles des foyers situés sur cet axe.

Quand une surface du second degré est de révolution, il y a, pour un foyer F situé sur l'axe de révolution, un plan P tel que tout point $p(xy)$ de ce plan a son plan polaire perpendiculaire à la droite qui le joint au foyer.

De là, si les axes de coordonnées sont perpendiculaires entre eux, $f(xyz)=0$ étant l'équation de la surface, et $t=1$,

$$xf'_{1x_1}+yf'_{1y_1}+zf'_{1z_1}+tf'_{1t_1}=0,$$

$$\frac{x_1-x}{f'_x}=\frac{y_1-y}{f'_y}=\frac{z_1-z}{f'_z}=-\frac{1}{2S},$$

d'où

$$\begin{aligned}
&A\ x+B''y+B'z+C+S(x_1-x)=0,\\
&B''x+A'y+B\ z+C'+S(y_1-y)=0,\\
&B'x+B\ y+A''z+C''+S(z_1-z)=0,\\
&f'_{1x_1}x+f'_{1y_1}y+f'_{1z_1}z+f'_{1t_1}=0,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{vmatrix}
A-S & B'' & B' & C+Sx_1\\
B'' & A'-S & B & C'+Sy_1\\
B' & B & A''-S & C''+Sz_1\\
f'_{1x_1} & f'_{1y_1} & f'_{1z_1} & f'_{1t_1}
\end{vmatrix}=0,$$

ce qui apprend que S ne varie pas avec le point p sur le plan P.

Les équations qui précèdent représentent donc séparément ce plan P. Il en résulte

$$\frac{A-S}{B''}=\frac{B''}{A'-S}=\frac{B'}{B}=\frac{C+Sx_1}{C'+Sy_1},$$

$$\frac{A-S}{B'}=\frac{B''}{B}=\frac{B'}{A''-S}=\frac{C+Sx_1}{C''+Sz_1},$$

$$\frac{A-S}{f'_{1x_1}}=\frac{B''}{f'_{1y_1}}=\frac{B'}{f'_{1z_1}}=\frac{C+Sx_1}{f'_{1t_1}};$$

$$\frac{B''}{B'}=\frac{A'-S}{B}=\frac{B}{A''-S}=\frac{C'+Sy_1}{C''+Sz_1},$$

$$\frac{B''}{f'_{1x_1}}=\frac{A'-S}{f'_{1y_1}}=\frac{B}{f'_{1z_1}}=\frac{C'+Sy_1}{f'_{1t_1}},$$

$$\frac{B'}{f'_{1x_1}}=\frac{B}{f'_{1y_1}}=\frac{A''-S}{f'_{1z_1}}=\frac{C''+Sz_1}{f'_{1t_1}}.$$

Soit d'abord $BB'B'' \gtrless 0$: on aura

$$S = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

puis

$$Bf'_{x_1} = B'f'_{y_1} = B''f'_{z_1},$$

ou

$$B(C + Sx_1) = B'(C' + Sy_1) = B''(C'' + Sz_1),$$

équations qui déterminent l'axe de révolution, et en outre pour les foyers

$$(C + Sx_1)f'_{1x_1} = \frac{B'B''}{B} f'_{1t},$$

ou

$$(C' + Sy_1)\, f'_{1y_1} = \frac{B''B}{B'} f'_{1t},$$

ou

$$(C'' + Sz_1)f'_{1z_1} = \frac{BB'}{B''} f'_{1t},$$

ou

$$f'_{1t} = (C + Sx_1)\frac{f'_{1y_1}}{B''} = (C + Sx_1)\frac{f'_{1z_1}}{B'},$$

$$f'_{1t} = (C' + Sy_1)\frac{f'_{1x_1}}{B''} = (C' + Sy_1)\frac{f'_{1y_1}}{B},$$

$$f'_{1t} = (C'' + Sz_1)\frac{f'_{1x_1}}{B'} = (C'' + Sz_1)\frac{f'_{1y_1}}{B}.$$

Dans le cas où B est nul, il faut avoir $B' = 0$, $A'' - S = 0$, ou bien $B'' = 0$, $A' - S = 0$.

Supposons $B = 0$ et $B' = 0$, $A'' - S = 0$. On aura le plan P par les équations

$$\begin{aligned}(A - S)x + B''y + C + Sx_1 &= 0,\\ B''x + (A' - S)y + C' + Sy_1 &= 0,\\ C'' + Sz_1 &= 0,\\ xf'_{1x_1} + yf'_{1y_1} + zf'_{1z_1} + tf'_{1t_1} &= 0;\end{aligned}$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{A-A''}{B''}=\dfrac{B''}{A'-A''}=\dfrac{C+A''x_1}{C'+A''y_1}\\[2ex] \dfrac{A-A''}{f'_{1x_1}}=\dfrac{B''}{f'_{1y_1}}=\dfrac{C+A''x_1}{f'_{1z_1}}\end{array}\right\}\ C''+A''z_1=0,$$

C'est avoir pour condition $(A-A'')(A'-A'')-B''^2=0$, avec $B=0$, $B'=0$, et, pour l'axe, $C''+A''z_1=0$,

$$\frac{C+A''x_1}{C'+A''y_1}=\frac{A-A''}{B''}=\frac{B''}{A'-A''},$$

puis en outre, pour les foyers,

$$(C+A''x_1)f'_{1z_1}=(A-A'')f'_{1t_1},$$

ou

$$(C+A''x_1)f'_{1y_1}=B''f'_{1t_1}.$$

II. En suivant la première méthode, on observera que l'équation de la surface pouvant se mettre sous la forme

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=(mx+ny+pz+q)^2,$$

on aura identiquement

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2-\frac{1}{S}f=(mx+ny+pz+q)^2.$$

par conséquent les demi-dérivées

$$x-x_1-\frac{1}{S}(Ax+B''y+B'z+C),$$

$$y-y_1-\frac{1}{S}(B''x+A'y+Bz+C'),$$

$$z-z_1-\frac{1}{S}(B'x+By+A''z+C''),$$

$$-x_1(x-x_1)-y_1(y-y_1)-z_1(z-z_1)-\frac{1}{S}(Cx+C'y+C''z+D)$$

ont leurs coefficients proportionnels, d'où résultent

$$\frac{A-S}{B''}=\frac{B''}{A'-S}=\frac{B'}{B}=\frac{C+Sx_1}{C'+Sy_1},$$

$$\frac{A-S}{B'}=\frac{B''}{B}=\frac{B'}{A'-S}=\frac{C'+Sx_1}{C''+Sz_1},$$

$$\frac{A-S}{C+Sx_1}=\frac{B''}{C'+Sy_1}=\frac{B}{C''+Sz_1}=\frac{C+Sx_1}{-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)S+D},$$

$$\frac{B''}{B'}=\frac{A'-S}{B}=\frac{B}{A''-S}=\frac{C'+Sy_1}{C''+Sz_1},$$

$$\frac{B''}{C+Sx_1}=\frac{A'-S}{C'+Sy_1}=\frac{B}{C''+Sz_1}=\frac{C'+Sy_1}{-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)S+D},$$

$$\frac{B'}{C+Sx_1}=\frac{B}{C'+Sy_1}=\frac{A''-S}{C''+Sz_1}=\frac{C''+Sz_1}{-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)S+D}.$$

On a par là, avec les mêmes conditions que ci-dessus, la même valeur de S et les mêmes équations pour l'axe, puis à l'égard des foyers

$$\begin{aligned}(x_1^2+y_1^2+z_1^2)S-D&=-\frac{(C+Sx_1)^2}{A-S}=-\frac{(C'+Sy_1)^2}{A'-S}\\&=-\frac{(C''+Sz_1)^2}{A''-S}=-\frac{(C'+Sy_1)(C''+Sz_1)}{B}\\&=-\frac{(C''+Sz_1)(C+Sx_1)}{B'}\\&=-\frac{(C+Sx_1)(C'+Sy_1)}{B''}.\end{aligned}$$

Si l'on remplace D par $D+Sr^2$, on aura, à la place des foyers, le centre d'une sphère inscrite, et la sphère par l'équation

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2-r^2=0.$$