Nouvelles annales de mathématiques

Abel Transon

Loi des séries de Wronski ; sa phoronomie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 305-318

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__305_0>

LOI DES SÉRIES DE WRONSKI; SA PHORONOMIE (*);

PAR M. ABEL TRANSON.

La démonstration que Wronski a donnée, en 1812, de sa *loi des séries*, dans la troisième Note annexée au Mémoire sur la *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques*, est, comme j'ai déjà eu l'occasion de le dire (**), extrêmement simple. Mais parce que les premiers ouvrages de l'auteur ne se trouvent plus dans le commerce, je crois faire une chose utile en publiant ici cette démonstration.

Je donnerai ensuite l'application de la loi au développement d'une fonction suivant les *facultés*, et aussi suivant les *puissances* de la variable indépendante.

Je donnerai aussi l'énoncé d'un théorème dont la démonstration implique une théorie spéciale des déterminants, et qui constitue « le principe fondamental de la déduction algorithmique de la Loi suprême. »

Enfin, je ferai voir que Wronski, bien avant que M. Ampère eût produit son idée de la *Cinématique*, avait établi la nécessité d'une science qu'il appelle *phoronomie*, ayant pour objet l'étude des lois du mouvement, abstraction faite des forces qui le produisent.

I. L'auteur avait démontré dans sa *Philosophie des Mathématiques*, publiée en 1811, que la forme générale des séries est la suivante :

$$F(x) = A_0 + A_1\varphi(x)^{1|\xi} + A_2\,\varphi\,(x)^{2|\xi} + A_3\varphi(x)^{3|\xi} + \ldots,$$

(*) *Phoronomie*, science du mouvement.

(**) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XIII, p. 161.

dans laquelle le symbole $\varphi(x)^{m|\xi}$ représente le produit de m termes, savoir :

$$\varphi(x)^{m|\xi} = \varphi(x)\varphi(x+\xi)\varphi(x+2\xi)\ldots\varphi[x+(m-1)\xi].$$

Et il s'agissait, dans la Note de 1812, de donner la formule du coefficient général A_μ. Ici je citerai textuellement l'auteur.

. . . .

« A cet effet, rappelons que la différence régressive d'une fonction $f(x)$ est l'excès de cette fonction sur celle qui la précède dans l'ordre de l'accroissement ξ de la variable, savoir :

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-\xi).$$

» L'expression d'un ordre quelconque de ces différences, toujours dans l'ordre régressif, est

$$\Delta^\mu f(x) = f(x) - \frac{\mu}{1} f(x-\xi) + \frac{\mu.\mu-1}{1.2.} f(x-2\xi)$$
$$- \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3} f(x-3\xi) + \ldots;$$

appliquant cette formule à une fonction de la forme $f(x) = \varphi(x)^{\omega|\xi}$, on a

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^\mu \varphi(x)^{\omega|\xi} = \varphi(x)^{\omega|\xi} - \frac{\mu}{1}\varphi(x-\xi)^{\omega|\xi} \\ \qquad + \frac{\mu.\mu-1}{1.2}\varphi(x-2\xi)^{\omega|\xi}\ldots + (-1)^\mu \varphi(x-\mu\xi)^{\omega|\xi}. \end{array} \right.$$

» D'ailleurs, puisqu'on a en général

$$\varphi(x-\lambda\xi)^{\omega|\xi}$$
$$= \varphi(x-\lambda\xi)\varphi(x-\lambda\xi+\xi)\varphi(x-\lambda\xi+2\xi)\ldots\varphi(x-\lambda\xi+(\omega-1)\xi),$$

λ étant un nombre quelconque, le facteur $\varphi(x)$ se trouvera contenu dans la faculté $\varphi(x-\lambda\xi)^{\omega|\xi}$ lorsque ω sera plus grand que λ, et que d'ailleurs ω et λ seront des nombres entiers, ainsi que nous le supposerons ici. Donc le même facteur $\varphi(x)$ sera contenu dans tous les termes de l'expression (1) de la différence $\Delta^{\mu}\varphi(x)^{\omega|\xi}$, lorsque ω sera plus grand que μ; et par conséquent, en donnant à x la valeur qui réduit à zéro le facteur $\varphi(x)$, on aura, dans le cas en question, la valeur

$$\Delta^{\mu}\varphi(x)^{\omega|\xi}=0. \tag{2}$$

» Or la forme générale des séries est

$$F(x)=A_0+A_1\varphi(x)^{1|\xi}+A_2\varphi(x)^{2|\xi}+A_3\varphi(x)^{3|\xi}+\ldots. \tag{3}$$

» Prenant donc des deux membres de cette expression (3) les différences des ordres régressifs 1, 2, 3, 4, ..., et donnant ensuite à x la valeur qui réduit à zéro le facteur $\varphi(x)$, nous aurons, en vertu de l'équation (2), la suite des équations

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{l}
\Delta\, F(x)=A_1\Delta\,\varphi(x)\\
\Delta^2F(x)=A_1\Delta^2\varphi(x)+A_2\Delta^2\varphi(x)^{2|\xi}\\
\Delta^3F(x)=A_1\Delta^3\varphi(x)+A_2\Delta^3\varphi(x)^{2|\xi}+A_3\Delta^3\varphi(x)^{3|\xi}\\
\Delta^4F(x)=A_1\Delta^4\varphi(x)+A_2\Delta^4\varphi(x)^{2|\xi}+A_3\Delta^4\varphi(x)^{3|\xi}+A_4\Delta^4\varphi(x)^{4|\xi}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

» La première de ces équations donne immédiatement

$$A_1=\frac{\Delta\,F(x)}{\Delta\,\varphi(x)}.$$

» En second lieu, puisqu'en vertu de l'équation (2) on a $\Delta\varphi(x)^{2|\xi}=0$, les deux premières des équations précédentes (4) sont identiques avec celles-ci :

$$\begin{array}{l}
\Delta\,F(x)=A_1\,\Delta\,\varphi(x)+A_2\Delta\,\varphi(x)^{2|\xi}\\
\Delta^2F(x)=A_1\,\Delta^2\varphi(x)+A_2\Delta^2\varphi(x)^{2|\xi},
\end{array}$$

équations qui donnent immédiatement (*)

$$A_2 = \frac{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 F(x)]}{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}]}.$$

» En troisième lieu, observant qu'en vertu de la valeur générale (2), on a

$$\Delta\varphi(x)^{2|\xi} = 0, \quad \Delta\varphi(x)^{3|\xi} = 0, \quad \Delta^2\varphi(x)^{3|\xi} = 0,$$

on verra que les trois premières des équations (4) sont identiques avec celles-ci :

$$\begin{aligned}
\Delta\, F(x) &= A_1 \Delta\, \varphi(x) + A_2 \Delta\, \varphi(x)^{2|\xi} + A_3 \Delta\, \varphi(x)^{3|\xi},\\
\Delta^2 F(x) &= A_1 \Delta^2 \varphi(x) + A_3 \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi} + A_3 \Delta^2 \varphi(x)^{3|\xi},\\
\Delta^3 F(x) &= A_1 \Delta^3 \varphi(x) + A_2 \Delta^3 \varphi(x)^{2|\xi} + A_3 \Delta^3 \varphi(x)^{3|\xi},
\end{aligned}$$

équations qui donnent encore immédiatement

$$A_3 = \frac{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}\, \Delta^3 F(x)]}{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}\, \Delta^3 \varphi(x)^{3|\xi}]}.$$

» Et procédant de la même manière, on verra, non par induction, mais par le principe même de la formation de ces quantités, qu'on aura en général

$$A_\mu = \frac{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}\, \Delta^3 \varphi(x)^{3|\xi} \ldots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{\mu-1|\xi}\, \Delta^\mu F(x)]}{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}\, \Delta^3 \varphi(x)^{3|\xi} \ldots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{\mu-1|\xi}\, \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu|\xi}]},$$

μ étant un indice quelconque.

» De plus, ayant égard à la valeur de x dans cette ex-

(*) Les produits entre crochets, au numérateur et au dénominateur de A_2, et plus loin aux numérateurs et dénominateurs de A_3, A_4,..., A_μ, sont les termes principaux des *déterminants* qui donnent les valeurs de ces coefficients. L'auteur donne à ces déterminants le nom de fonctions *schinn*, d'après la lettre hébraïque qu'il leur attribue pour caractéristique. Je me conforme à la notation actuellement usitée; mais je constate en passant l'avance que Wronski prenait sur les géomètres contemporains en faisant dès sa première publication (1810-1811) un continuel usage de ces fonctions, devenues depuis un si précieux instrument dans toute l'Algorithmie.

pression du coefficient général de A_μ, et par suite à la valeur (2), on verra que la somme combinatoire (*le déterminant*) formant le dénominateur de A_μ que nous venons de déterminer, se réduit à son premier terme, c'est-à-dire qu'on a

$$\begin{aligned}&[\Delta^1 \varphi x\ \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}\ \Delta^3 \varphi(x)^{3|\xi} \ldots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{\mu-1|\xi}\ \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu|\xi}]\\ &\quad = \Delta^1 \varphi x\ \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}\ \Delta^3 \varphi(x)^{3|\xi} \ldots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{\mu-1|\xi}\ \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu|\xi},\end{aligned}$$

» Et c'est là l'expression algorithmique de la *loi générale des séries*. »

Avant d'en venir à l'application ci-dessus annoncée, j'appelle l'attention du lecteur sur l'avertissement dont l'auteur fait suivre la démonstration précédente :

« ... Nous devons prévenir que, dans un système de Philosophie des Mathématiques, cette démonstration, quelque rigoureuse et simple qu'elle soit, n'est pas encore suffisante. La loi dont il s'agit, qui est la *loi générale des séries*, se trouve être un cas particulier de la loi algorithmique absolue, dont la forme est la suivante :

$$F(x) = A_0 \Omega_0 + A_1 \Omega_1 + A_2 \Omega_2 + A_3 \Omega_3 + \ldots ;$$

les quantités Ω_0, Ω_1, Ω_2,... étant des fonctions quelconques de la variable, liées ou non par une loi ;... il faut donc, pour démontrer la loi dont il est question, la déduire immédiatement comme cas particulier de la loi absolue que nous venons d'indiquer, et c'est cette déduction qui donnera la démonstration philosophique de la *loi générale des séries* dont nous parlons. »

L'auteur, qui, dans la première section de la *Philosophie de la technie*, a donné en 1815 la démonstration de la *loi suprême*, en a effectivement déduit comme cas particulier la *Loi des séries* dans la seconde section du même Ouvrage (1816-1817).

II. Dans le cas de $\varphi(x)$ quelconque, la circonstance de $\Delta^\mu\varphi(x)^{\omega|\xi}=0$, toutes les fois qu'on a $\omega>\mu$, donne lieu à ce que, dans le déterminant qui est au numérateur de A_μ, tous les termes au-dessus de la diagonale qui sert à former le terme principal sont nuls, excepté ceux de la dernière colonne, qui sont les différences successives de $F(x)$, savoir : $\Delta F(x), \Delta^2 F(x), \ldots, \Delta^{\mu-1} F(x), \Delta^\mu F(x)$.

En outre, dans le cas de $\varphi(x)=x$, tous les termes de cette diagonale sont des constantes, à l'exception du dernier qui est égal à $\Delta^\mu F(x)$. Car on a

$$\Delta(x)=1.\xi;\quad \Delta^2 x^{2|\xi}=1.2.\xi^2;\quad \Delta^3 x^{3|\xi}=1.2.3.\xi^3;\ldots,$$

et, vu que les termes qui leur sont inférieurs dans chaque colonne sont les différences successives de ces termes constants, ces termes inférieurs sont tous nuls ; ainsi, pour le cas de $\varphi x=x$, le déterminant qui est au numérateur de A_μ se réduit à son terme principal. Au numérateur et au dénominateur il y a donc deux produits d'un égal nombre de facteurs, et ces deux produits ne diffèrent que par le dernier facteur de chacun d'eux. Ainsi l'on a

$$A_\mu=\frac{\Delta^\mu F(0)}{1.2.3\ldots\mu\xi^\mu}.$$

Il faut mettre $\Delta^\mu F(0)$, puisque dans le cas général on doit substituer à x dans A_μ la valeur particulière de x qui donne lieu à $\varphi(x)=0$, et ici cette valeur est $x=0$.

Finalement, on a pour le développement de $F(x)$, selon les facultés successives de x :

$$F(x)=F(0)+\frac{\Delta F(0)}{\xi}.x^{1|\xi}+\frac{\Delta^2 F(0)}{\xi^2}.\frac{x^{2|\xi}}{1.2}+\frac{\Delta^3 F(0)}{\xi^3}.\frac{x^{3|\xi}}{1.2.3}+\ldots.$$

Supposons maintenant ξ infiniment petit, égal à dx ;

les différences finies représentées par les Δ deviennent des différentielles, et l'on a pour le développement, selon les puissances successives de la variable

$$F(x) = F(o) + \left(\frac{dF(o)}{dx}\right) x + \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) \frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{d^3F}{dx^3}\right) \frac{x^3}{1\ 2.3} \cdots$$

C'est le développement de Maclaurin, lequel, appliqué à la fonction $F(x) = f(x+h)$, donne le développement de Taylor après qu'on y a changé h en x.

Dans l'enseignement actuel, le développement de Taylor s'introduit dans la science par l'essai d'étendre à une fonction algorithmique quelconque une certaine propriété des fonctions algébriques entières. C'est prendre la question d'aussi bas que possible. En déduisant ce développement de la loi des séries, on y arrive par une voie plus large, plus éclairée, et qui, ce me semble, fait mieux comprendre l'importance du résultat et sa place dans la science. — D'ailleurs, comme, en arrêtant un développement quelconque à l'un de ses termes, on peut toujours concevoir l'existence d'un terme complémentaire, il est manifeste qu'en adoptant la déduction ci-dessus on pourra ensuite établir comme à l'ordinaire la *forme du reste*.

III. Comment les résultats de Wronski ont-ils pu rester si longtemps en oubli? Personne ne croira que les conclusions si peu motivées du Rapport de 1811 aient pu balancer dans l'esprit des géomètres le témoignage imposant de Lagrange, déclarant en 1810 que « *l'auteur tire de sa formule* (de la loi suprême) *toutes celles que l'on connaît pour le développement des fonctions et qu'elles n'en sont que des cas très-particuliers.* » Mais, sans m'arrêter à chercher l'explication de ce fait étrange qu'il faut bien admettre, savoir : que les savants en général ont ignoré les travaux de Wronski, j'irai au-devant d'une difficulté derrière laquelle certaines personnes pourraient aujourd'hui encore abriter leur refus d'examiner ces travaux.

En présentant sa *loi des séries* et la loi beaucoup plus générale qu'il appelle la *loi suprême*; celle aussi qu'il appelle le *problème universel*, dont M. Cayley vient de simplifier la démonstration ; en présentant de nombreuses applications de ces lois, Wronski ne se préoccupe pas de savoir si les développements qu'il en déduit sont convergents, ou divergents, ou stationnaires. Ce n'est pas qu'il méconnaisse la nécessité de la convergence lorsqu'il s'agit de l'évaluation numérique des fonctions ; il a fait une large place à cette question dans sa *Philosophie de la Technie* (seconde section); mais il croit que les séries qu'il appelle *régulières*, exprimant par l'ensemble infini de leurs termes une relation précise entre la fonction développée et la fonction arbitraire prise pour mesure algorithmique de la première, ont par cela même une signification très-déterminée, et cela indépendamment de la circonstance contingente de convergence ou de non-convergence. Cependant les géomètres, ne reconnaissant aux séries aucun autre emploi que d'offrir la valeur approchée des fonctions, se croient fondés à n'admettre que des séries convergentes, et certainement on serait mal avisé de vouloir présenter aujourd'hui une série, quelque élégante qu'elle soit, si l'on n'apportait pas en même temps une discussion de sa convergence. Sans prendre parti dans cette question, je me borne à l'humble observation suivante :

Refuser de prendre tel ou tel développement en considération, parce que l'auteur n'a pas donné les conditions de convergence de ce développement, c'est se placer dans la situation d'un géomètre qui aurait dédaigné les séries de Taylor, de Maclaurin, de Burmann, de Lagrange, jusqu'à l'époque encore récente où l'on a connu avec précision les conditions de convergence de ces séries; oui! c'est se placer exactement dans la même situation. — On n'y a pas pensé!

IV. Lorsque Wronski présenta, en 1810, à l'Académie des Sciences, sa *loi suprême,* la théorie des déterminants était encore très-peu avancée. Plus tard, les recherches de Binet et de Cauchy étendirent et généralisèrent les résultats précédemment obtenus (*Journal de l'École Polytechnique,* 1813 et 1815); mais, même à ces dernières époques et longtemps encore après, ces fonctions étaient considérées par les géomètres comme formées essentiellement de quantités constantes. Cependant, dès 1810, Wronski faisait dépendre la démonstration de la *loi suprême* d'une théorie spéciale de ces mêmes fonctions, en les considérant comme formées, non plus avec des quantités constantes, mais avec des quantités variables liées entre elles par certaines relations. Il réduisait cette théorie à un théorème unique dont je crois devoir donner l'énoncé, premièrement à cause de son importance puisqu'il conduit à la *loi suprême,* et secondement parce que, après les développements considérables que la théorie des déterminants a reçus de nos jours, la démonstration de ce théorème n'offrira peut-être pas au lecteur des difficultés sérieuses.

Théorème. — Soient $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_\omega$ des fonctions d'une variable x, et soit Δ la caractéristique des différences prises à volonté suivant la loi progressive ou la loi régressive, par rapport à un accroissement quelconque de la variable x. Si avec ces fonctions on construit, d'une part, les quantités

$$X_1 = [\Delta_0^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_1],$$
$$X_2 = [\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_2],$$
$$X_3 = [\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_3],$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$X_\omega = [\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_\omega] \ (^*),$$

et, d'une autre part, les quantités

$$T_1 = \Delta^{\delta_0} Y_0 + i\Delta^{\delta_1} Y^0,$$
$$T_2 = \Delta^{\delta_0} Y_0 + 2i\Delta^{\delta_1} Y_0 + i^2\Delta^{\delta_2} Y_0,$$
$$T_3 = \Delta^{\delta_0} Y_0 + 3i\Delta^{\delta_1} Y_0 + 3i^2\Delta^{\delta_2} Y_0 + i^3\Delta^{\delta_3} Y_0;$$

et généralement, pour un indice quelconque ρ,

$$T_\rho = \Delta^{\delta_0} Y_0 + \frac{\rho}{1} i\Delta^{\delta_1} Y_0 + \frac{\rho(\rho-1)}{1.2} i^2\Delta^{\delta_2} Y_0 + \frac{\rho(\rho-1)(\rho-2)}{1.2.3} i^3\Delta^{\delta_3} Y_0 + \dots,$$

en faisant $i = +1$, lorsque les différences Δ sont prises suivant la voie progressive et $i = -1$ lorsque ces différences sont prises suivant la voie régressive, on aura la relation d'égalité ci-dessous, qui constitue le théorème dont il s'agit :

$$[\Delta^0 X_1 \Delta^1 X_2 \Delta^2 X_3 \dots \Delta^{\omega-1} X_\omega]$$
$$= (T_1 T_2 T_3 \dots T_{\omega-1}) [\Delta^{\delta_0} Y_{\Delta 1} \Delta^{\delta_1} Y_1 \Delta^{\delta_2} Y_2 \dots \Delta^{\delta_{10}} Y_{10}],$$

où l'on donne aux indices des différences des fonctions Y les valeurs suivantes :

$$\delta_0 = \delta, \quad \delta_1 = 1 + \delta, \quad \delta_2 = 2 + \delta, \dots, \quad \delta_\omega = \omega + \delta,$$

(*) Chaque produit entre crochets représente le terme principal d'un déterminant à quatre éléments, de sorte, par exemple, que

$$X_n = \Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_n - \Delta^{\delta_0} Y_n \Delta^{\delta_1} Y_0.$$

δ étant un nombre entier quelconque, ainsi que ω (*Philosophie de la Technie,* Section Ire, p. 193).

Dans l'égalité ci-dessus, les deux produits entre crochets représentent encore, dans le premier membre, le terme principal d'un déterminant à ω^2 éléments, et dans le second membre le terme principal d'un déterminant à $(\omega+1)^2$ éléments. Il va sans dire qu'on a $\Delta^0 X_1 = X_1$ et $\Delta^0 Y_0 = Y_0$. D'ailleurs, pour bien fixer le sens du théorème, je vais en faire la vérification dans le cas le plus simple possible, savoir dans le cas de $\delta = 0$ et de $\omega = 2$ (*).

L'égalité proposée se réduit alors à

$$[\Delta^0 X_1 \, \Delta^1 X_2] = T_1 \, [\Delta^0 Y_0 \, \Delta^1 Y_1 \, \Delta^2 Y_2].$$

Supposant les différences prises dans le sens progressif, la fonction $T_1 = Y_0 + \Delta Y_0$ est la même chose que Y_1, et le second membre de l'égalité ci-dessus est égal à

$$\begin{aligned} &+ Y_1 Y_0 (\Delta Y_1 \Delta^2 Y_2 - \Delta Y_2 \Delta^2 Y_1), \\ &- Y_1 \Delta Y_0 (Y_1 \Delta^2 Y_2 - Y_2 \Delta^2 Y_1), \\ &+ Y_1 \Delta^2 Y_0 (Y_1 \Delta Y_2 - Y_2 \Delta Y_1). \end{aligned}$$

Or, si l'on a égard aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta X_1 &= Y_0 \Delta^2 Y_1 - Y_1 \Delta^2 Y_0 + \Delta Y_0 \Delta^2 Y_1 - \Delta Y_1 \Delta^2 Y_0, \\ \Delta X_2 &= Y_0 \Delta^2 Y_2 - Y_2 \Delta^2 Y_0 + \Delta Y_0 \Delta^2 Y_2 - \Delta Y_2 \Delta^2 Y_0, \end{aligned}$$

on verra aisément que le premier membre, savoir :

$$X_1 \Delta X_2 - X_2 \Delta X_1,$$

est précisément identique au second.

V. Dans son *Essai sur la Philosophie des Sciences,* ou *Exposition d'une classification des connaissances hu-*

(*) D'après l'indice le plus élevé des fonctions T, on voit que la moindre valeur que puisse avoir l'indice ω, c'est d'être égal à 2.

maines, essai publié en 1834, M. Ampère faisait ressortir tous les avantages d'une science où l'on s'occuperait des propriétés géométriques du mouvement, abstraction faite des forces qui le produisent et des masses qui en sont animées. Il lui donne le nom de *cinématique* (du grec κινημα, mouvement) et son heureuse conception, accueillie par tous les savants, a été développée ultérieurement par le général Poncelet et par plusieurs géomètres de son école. La Cinématique est donc aujourd'hui une science constituée et l'honneur de sa création remonte à Ampère, puisqu'il est avéré que les publications de Wronski sont passées inaperçues des savants.

Toutefois, si l'on accorde que la propriété d'une idée appartient à celui qui l'a publiée le premier, il faudra revendiquer en faveur de Wronski l'invention de la science du mouvement sans les forces.

Effectivement, en 1818, seize ans avant l'apparition de l'*Essai sur la Philosophie des Sciences* de M. Ampère, Wronski avait publié, dans le premier numéro du *Sphinx* (*), un tableau général des sciences intitulé : *Système architectonique absolu de l'Encyclopédie du savoir humain ;* et dans ce tableau on trouve classée, sous le nom de *Phoronomie*, une science du mouvement, avec cet avertissement : *ne pas confondre avec la Mécanique dans laquelle entre de plus la considération des forces.*

La priorité de l'idée est donc bien à Wronski. Après cela il est curieux d'examiner, à un point de vue philosophique, la place qu'Ampère donne à la Cinématique dans sa *Classification naturelle des sciences*, et de la comparer à la situation donnée à la Phoronomie dans le *Système architectonique du savoir humain.*

(*) Le *Sphinx*, recueil périodique dont il a paru seulement deux numéros; leur publication avait été précedée de l'*Introduction au Sphinx*.

Ampère, après avoir rangé la Mécanique parmi les sciences du *premier ordre,* la subdivise comme il suit :

- MÉCANIQUE
  - *élémentaire :*
    - Cinématique,
    - Statique;
  - *transcendante :*
    - Dynamique,
    - Mécanique moléculaire.

Ce n'est pas le lieu d'expliquer les quatre points de vue d'après lesquels l'auteur décompose chaque science du *premier ordre*, et particulièrement la Mécanique, en quatre sciences du *troisième ordre.* Jean Reynaud a consacré une partie de sa remarquable dissertation sur l'*Encyclopédie* à montrer combien précaires et insuffisantes sont les bases de la classification d'Ampère (*). Mais il faut s'étonner qu'un esprit si judicieux ait classé, comme une branche de la Mécanique, cette même science dont il excluait la force et la masse pour n'y considérer que le mouvement. Sans doute l'enseignement de la Cinématique doit précéder immédiatement l'enseignement de la Mécanique ; mais autres sont les convenances de l'enseignement, autres les nécessités d'une classification philosophique.

Dans tous les ouvrages de Wronski, Traités de Mathématiques, de Philosophie, de Religion, de Politique, d'Histoire,..., partout se trouvent des résumés offrant, comme gages d'une doctrine fixe et vraiment générale, les mêmes formes de classification. Ces formes caractérisent le *Système architectonique* publié en 1818. J'y constate particulièrement la reproduction constante d'un ternaire résultant de deux idées hétérogènes qui s'opposent comme *pôles*, et d'une troisième idée où les deux premières se confondent et se *neutralisent.* Voici, par

(*) *Voir* l'article *Encyclopédie* dans la 41e livraison (1843) de l'*Encyclopédie pittoresque.*

exemple, la partie du *Système architectonique* qui se rapporte aux Mathématiques :

MATHÉMATIQUES PURES :

a_1) Pôles opposés.

a_2) Conjonction de l'espace; étendue : GÉOMÉTRIE.

b_2) Succession du temps. — Nombre : ALGORITHMIE.

b_1) Neutralisation du temps et de l'espace :

Mouvement : PHORONOMIE.

(Qu'il ne faut pas confondre avec la Mécanique dans laquelle entre de plus la considération des forces.)

Ainsi, selon Wronski, le ternaire des Mathématiques pures se compose de ces trois termes : Géométrie, Algorithmie, Phoronomie. Quant à la *Mécanique*, il la place dans les SCIENCES DE LA NATURE ; c'est une branche de la *Physique*.

Post scriptum. — Je m'estimerai heureux si j'ai pu, dans un sujet purement mathématique, faire au moins pressentir la valeur de Wronski comme philosophe, d'autant plus que lui-même déclare n'attacher de prix à ses travaux mathématiques que comme offrant la garantie scientifique de sa Philosophie.