Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 294-303

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__294_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1033

(voir 2e série, t. XI, p. 336);

PAR M. A. PELLISSIER.

On donne un cylindre droit et une hélice tracée sur ce cylindre : trouver la longueur d'un arc de l'hélice tel, que les tangentes menées à ses extrémités se rencontrent.

Soient

AB un arc d'hélice tel, que les tangentes AC, BC menées à ses extrémités A, B se rencontrent en un point C;

R le rayon de la base du cylindre sur lequel l'hélice est tracée;

O le centre de cette base;

ac, bc les projections de AC, BC sur le plan de la base du cylindre, et tangentes en a, b, à la circonférence dont O est le centre;

h le pas de l'hélice;

α l'angle constant que les tangentes à l'hélice forment avec les génératrices du cylindre;

x l'arc ab de la circonférence O terminé aux points de contact a, b.

On voit facilement que $Cc - Aa = ca.\cot\alpha$, et $Bb - Cc = cb.\cot\alpha$, d'où

$$Cc - Aa = Bb - Cc = \tfrac{1}{2}(Bb - Aa);$$

le point C est donc également distant des deux plans menés par les points A, B parallèlement au plan de la base du cylindre.

Le triangle aOc donne

$$ac = R \tan aOc = R \tan\frac{x}{2R},$$

d'où

$$Cc - Aa = R \tan\frac{x}{2R}\cot\alpha.$$

D'autre part, $Bb - Aa = \dfrac{hx}{2\pi R}$; il s'ensuit

$$R \tan\frac{x}{2R}\cot\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{hx}{2\pi R},$$

et, parce que $\cot\alpha = \dfrac{h}{2\pi R}$, on a

$$\tan\frac{x}{2R} = \frac{x}{2R}.$$

Par conséquent, la question se ramène à trouver un angle $\dfrac{x}{2R}$ qui soit mesuré par le même nombre que sa tangente, ce qui est une question dont la solution se trouve dans la plupart des Traités d'Algèbre.

Connaissant x, on en conclura immédiatement la longueur de l'arc AB de l'hélice.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1119

(voir 2e série, t. XII, p. 527);

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie.

Parmi tous les triangles ayant un même angle dont le cosinus est supposé commensurable, il en est une infinité dont les côtés sont en nombres entiers.

(ABEL TRANSON.)

Soient a, b, c les côtés d'un triangle, et $\cos A = \frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers premiers entre eux : on a

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{p}{q}, \quad \text{d'où} \quad \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(a+b-c)(a+c-b)} = \frac{q+p}{q-p}.$$

Posons $(b+c-a) = X$, et $(a+c-b) = Y$, et remarquons que

$$a+b+c = (b+c-a)+(a+c-b)+(a+b-c),$$

il viendra

$$\frac{X+Y+(a+b-c)}{(a+b-c)} = \frac{(q+p)Y}{(q-p)Y},$$

d'où

$$a+b-c = \frac{(q-p)X(X+Y)}{(q+p)Y-(q-p)X}.$$

Afin de n'avoir que des valeurs entières, nous prendrons

$$X = (b+c-a) = 2x[(q+p)y-(q-p)x],$$
$$Y = (a+c-b) = 2y[(q+p)y-(q-p)x],$$

d'où

$$(a+b-c) = 2[(q-p)x(x+y)],$$

ce qui donne

$$a = (q+p)y^2+(q-p)x^2,$$
$$b = 2qxy,$$
$$c = (x+y)[(q+p)y-(q-p)x].$$

Quels que soient les entiers x et y, pourvu que c soit positif, ces formules donnent, en nombres entiers positifs, les trois côtés d'un triangle, dans lequel l'angle A a pour cosinus $\frac{p}{q}$.

Si le cosinus de A était donné négatif, il suffirait de changer dans ce qui précède le signe de p.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1121

(voir 2e série, t. XII, p. 528);

PAR M. ALFRED ROUSSET.

Trouver le lieu des foyers des coniques tangentes en un point donné à une droite donnée, et ayant une extrémité de l'axe focal en un point donné.

(A. DE SAINT-GERMAIN.)

Soient F un des points du lieu (*); A l'extrémité donnée de l'axe focal; B le point de contact de la tangente donnée; C le point de rencontre de cette tangente et d'une perpendiculaire élevée à l'axe focal au point A; ω et α les angles BAF, ABF, et V l'angle CBA.

La droite FC est, comme on sait, bissectrice de l'angle AFB des rayons vecteurs FA, FB, menés aux points de contact A, B des tangentes CA, CB. Or les triangles CAF, CBF donnent

$$\sin \mathrm{CFA} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CF}}, \text{ et } \sin \mathrm{CFB} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CF}} \sin(\mathrm{V} + \alpha);$$

donc

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \sin(\mathrm{V} + \alpha).$$

Mais, dans le triangle CAB, on a

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{\sin \mathrm{CBA}}{\sin \mathrm{CAB}} = \frac{\sin \mathrm{V}}{\cos \omega};$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

par conséquent,

$$\sin V = \cos\omega \sin(V + \alpha). \tag{1}$$

C'est, en coordonnées ω, α, l'équation du lieu.

Pour l'obtenir en coordonnées rectilignes, prenons pour axe des x la droite BA, et la perpendiculaire en B pour axe des y. En posant $BA = a$, nous aurons

$$\cos\omega = \frac{a - x}{\sqrt{y^2 + (a - x)^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}},$$

et en remplaçant $\cos\omega$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ par ces valeurs dans l'équation

$$\sin V = \cos\omega \sin(V + \alpha) = \cos\omega(\cos\alpha \sin V + \sin\alpha \cos V), \tag{1}$$

il viendra

$$\sin V = \frac{a - x}{\sqrt{y^2 + (a - x)^2}} \left(\frac{x \sin V + y \cos V}{\sqrt{y^2 + x^2}}\right),$$

et, par suite,

$$\sin^2 V (x^2 + y^2)[y^2 + (a - x)^2] = (a - x)^2 (x \sin V + y \cos V)^2.$$

Cette équation du quatrième degré se ramène au troisième en supprimant le facteur y; et en réduisant on trouve

$$\sin^2 V (x^2 + y^2) y - (a - x)^2 (y \cos 2V + x \sin 2V) = 0. \tag{2}$$

La tangente, à l'origine, a pour équation

$$y \cos 2V + x \sin 2V = 0.$$

Les directions asymptotiques sont données par l'équation

$$c^3 \sin^2 V + c(\sin^2 V - \cos 2V) - \sin 2V = 0,$$

qui a pour racines

$$\cot V \quad \text{et} \quad \frac{-\cos V \pm \sqrt{1 - 9\sin^2 V}}{2\sin V};$$

ces trois racines sont réelles lorsqu'on a, en valeur absolue, $\sin V < \frac{1}{3}$.

Le moyen le plus commode pour construire la courbe est de se servir de l'équation

(1) $$\sin V = \cos\omega \sin(V + \alpha) \text{ (*)},$$

(*) En prenant pour centre d'une circonférence un point quelconque C de la droite donnée BC (tel qu'on ait $CB > CA$), et pour rayon CA, les points F, F′ auxquels les tangentes menées du point B à cette circonference rencontrent sa tangente en A appartiennent au lieu cherché. En faisant varier la position du point C sur la droite donnée, on obtiendra autant de points qu'on voudra du lieu géométrique en question.

Lorsque le point C, pris pour centre, se trouve à l'intersection de la droite BC et de la perpendiculaire élevée à la droite AB au point A, la tangente en A à la circonférence décrite est dirigée suivant AB; l'une des tangentes menées de B coïncide avec BA, et l'autre BA′ est symétrique de BA par rapport à la droite BC; on en peut conclure que le lieu cherché passe par les points A, B, et qu'il est tangent à la droite BA′ au point B.

Quand la distance CB devient infinie, la tangente en A et les tangentes issues du point B prennent des directions perpendiculaires à CB, et par conséquent parallèles; les points F, F′ passent alors à l'infini : donc la direction perpendiculaire à BC est asymptotique au lieu dont il s'agit.

Toute autre direction asymptotique correspond au cas particulier où la tangente en A à la circonférence considérée serait parallèle à une tangente menée du point B; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que ces deux tangentes soient perpendiculaires aux extrémités A, D d'un même diamètre ACD. Dans ce cas, la perpendiculaire élevée au diamètre AD, en son milieu C, ira nécessairement passer par le milieu M de AB; et, parce que l'angle ACM est droit, il faudra que le point C appartienne à une circonférence décrite sur AM comme diamètre, ce qui exige que la distance du centre de cette circonférence à la droite BC, ne surpasse pas son rayon, c'est-à-dire qu'on ait, en nommant V l'angle ABC,

$$\frac{3}{4}\text{AB} \sin V \leqq \frac{1}{4}\text{AB}, \quad \text{d'où} \quad \sin V \leqq \frac{1}{3}.$$

Quand la condition $\sin V < \frac{1}{3}$ sera remplie, la circonférence décrite sur AM comme diamètre coupera la droite BC en deux points C, C′, et les directions MC, MC′ seront asymptotiques. (G.)

qui devient

$$\sin V = \cos\omega \sin\lambda,$$

en posant $V + \alpha = \lambda$. Les valeurs entre lesquelles on doit faire varier λ sont telles que $\sin V < \sin\lambda$. On en déduit les valeurs entre lesquelles ω peut varier.

On voit facilement comment les directions asymptotiques s'obtiennent par la Géométrie. La direction correspondant à $c = \cot V$ est perpendiculaire à la tangente donnée BC. Les deux autres résultent de la construction suivante.

Soit M le milieu AB : la circonférence décrite sur AM comme diamètre rencontre généralement la droite BC en deux points C, C'; les droites MC, MC' sont les directions asymptotiques.

Note du Rédacteur. — La même question a été résolue par M. Gambey. Nous avons reçu deux autres solutions analytiques de cette question. Dans chacune de ces solutions, on a conclu, de ce que le calcul avait conduit à une équation du quatrième degré, que le lieu cherché etait une *courbe du quatrième ordre*. C'est, dans le cas actuel, une conclusion mal fondée, parce que l'équation du quatrième degré qui a éte obtenue se décompose en deux autres, dont l'une, du premier degre, représente la droite qui passe par le sommet et le point de contact donnés. Ainsi, par exemple, en prenant pour origine le sommet donné et pour axes des x et des y une perpendiculaire et une parallèle à la tangente donnée, on a trouve l'equation du quatrième degre

$$(fy^2 + dxy + dfx - d^2y)^2 - (x^2+y^2)[(f^2-d^2)y^2 + 2dfxy] = 0,$$

où d représente la perpendiculaire abaissée du sommet sur la tangente. et f la distance du pied de cette perpendiculaire au point de contact donné. Or cette équation se décompose en les deux suivantes :

$$dy - fx = 0$$

et

$$2dyx^2 + (fy^2 - 2d^2y - d^2f)x + dy^3 - 2dfy^2 + d^3y = 0.$$

La première, $dy - fx = 0$, est l'équation de la droite menée de l'origine au point de contact désigné. (G.)

Question 1127

(voir 2e série, t. XII, p. 335);

PAR M. E. GIVELET,

Élève du lycée de Reims (classe de M. Niewenglowski).

Lorsqu'un cercle, passant par un point fixe F est vu sous un angle constant d'un autre point F', ce cercle enveloppe un limaçon de Pascal qui a pour foyer double le point F et pour foyer simple le point F'.

Le lieu des centres des cercles satisfaisant à la question est une circonférence. En effet, soit C (*) l'un des centres. Menons du point F' une tangente F'T au cercle et joignons F'C. L'angle CF'T est constant, et égal à la moitié de l'angle donné; donc on a

$$\frac{\mathrm{CT}}{\mathrm{CF'}} = \text{const.},$$

ou, puisque $\mathrm{CT} = \mathrm{CF}$,

$$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CF'}} = \text{const.};$$

donc le lieu du point C est une circonférence dont le centre O est sur la droite FF', et l'on sait que, OA étant le rayon de ce cercle, on a

$$\overline{\mathrm{OA}}^2 = \mathrm{OF} \times \mathrm{OF'}.$$

Cela posé, je considère deux points très-voisins C et C' de cette circonférence. Le second point d'intersection des cercles décrits des points C et C' comme centres, et passant en F, s'obtiendra en abaissant du point F une perpendiculaire FP sur la droite CC', et la prolongeant d'une longueur $\mathrm{PQ} = \mathrm{FP}$. Si le point C' tend vers le

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

point C, la droite CC′ tend vers la tangente en C. Donc le point M, obtenu en abaissant une perpendiculaire FR sur la tangente en C, et la prolongeant d'une longueur RM = FR, est un point du lieu.

Du point O comme centre, décrivons un cercle avec OF comme rayon; abaissons du point O la perpendiculaire OI sur FM et menons OC. Soit N le second point d'intersection du cercle OF avec FM. On a

$$NM = FM - FN = 2FR - 2FI = 2OC = 2OA;$$

donc NM est constant et, par conséquent, le point M décrit un limaçon de Pascal dont F est le point double.

Je dis que le point F′ est le foyer simple. En effet, on a la relation

$$\overline{OA}^2 = OF \times OF' = OF\,(OF + FF'),$$

d'où

$$FF' = \frac{\overline{OA}^2 - \overline{OF}^2}{OF},$$

ce qui est bien l'expression de la distance du point double au foyer simple.

Note du rédacteur. — La même question a été résolue par MM. Pellissier, Bourguet, Demartres, Moret-Blanc, Launoy, Gambey, Émile Picard, V. H., à Saint-Étienne, Robaglia, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Painvin), Charles Combes, élève en Mathématiques spéciales, à Clermont-Ferrand, Ch. Semeny et E. Momy, élèves du lycée de Bordeaux, et Quellenec, élève en Mathématiques spéciales à Brest.

M. Robaglia, élève du lycée Louis-le-Grand, en a donné une solution entièrement analytique, suivie de recherches assez étendues, ayant pour objet de déterminer la *classe* du limaçon de Pascal, et les foyers tant imaginaires que réels de cette courbe. Nous regrettons de devoir nous borner, faute d'espace, à faire seulement connaître les principaux résultats de ce travail consciencieux, où l'on trouve à la fois de l'érudition et une assez grande habitude du calcul. M. Robaglia a démontré que le limaçon est une courbe de la quatrième classe, qui a deux foyers réels, dont l'un est *triple* et coïncide avec le centre du cercle directeur; le second foyer réel est *simple*, et se trouve sur l'axe de la courbe, à une distance du point double égale à $\frac{b^2 - a^2}{2b}$, en nommant b le diamètre du cercle directeur, et a la longueur dont on prolonge les rayons vecteurs.

Nous devons aussi faire mention d'une *Étude de quelques propriétés des foyers du limaçon de Pascal*, par M. *de Rufz de Lavison*, élève du lycée Louis-le-Grand, classe de M. Painvin.

Ces propriétés consistent dans des relations entre les distances d'un point quelconque M, de la courbe aux deux foyers, et au point double, ces distances étant considérées deux à deux. En désignant par F, F' et O le foyer triple, le foyer simple et le point double, on a

$$\frac{\mathrm{MF}^2}{b} - \mathrm{MF}' = \frac{2a^2 - b^2}{4b}, \quad \frac{\overline{\mathrm{MF}}^2}{a} \mp \mathrm{MO} = \frac{b^2}{4a}, \quad \mathrm{MF}' \pm \frac{a}{b}\,\mathrm{MO} = \mathrm{OF}'.$$

Ces formules ont été établies par M. de Rufz de Lavison, au moyen d'un calcul assez simple; la dernière est surtout remarquable.

(G.)