NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHARLES CHABANEL

Sur un problème d'analyse indéterminée relatif au tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 289-292

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__289_1>

SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE RELATIF AU TÉTRAÈDRE ;

PAR M. CHARLES CHABANEL.

Trouver un tétraèdre ayant parmi ses angles solides un trièdre trirectangle, et dont les six arêtes soient mesurées par des nombres entiers.

Soient a, b, c les arêtes dont le point de concours est au sommet du trièdre trirectangle, et p, q, r les côtés de la face opposée à ce sommet. On a

$$a^2 + b^2 = p^2, \tag{1}$$

$$b^2 + c^2 = q^2, \tag{2}$$

$$c^2 + a^2 = r^2. \tag{3}$$

Il s'agit donc de trouver, en nombres entiers, trois carrés tels, que la somme de deux quelconques d'entre eux soit un carré. L'*Arithmétique* de Diophante donne la solution numérique d'un problème analogue : je me servirai ici des artifices qui conduisent à cette solution.

Je pose

$$c^2 = 4 \times 2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)^2,$$

$$\gamma = \alpha^2 - \beta^2, \qquad \delta = 2\alpha\beta,$$

$$\gamma' = 2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2), \quad \delta' = (\alpha^2 - b^2)^2,$$

d'où

$$c^2 = 4\gamma\gamma' = 4\delta\delta'.$$

Si je donne aux arêtes a, b les valeurs suivantes :

$$a = \frac{\gamma}{t} - \gamma' t,$$

$$b = \frac{\delta}{t} - \delta' t,$$

t étant une indéterminée, j'aurai

$$a^2 + c^2 = \left(\frac{\gamma}{t} + \gamma' t\right)^2,$$

$$b^2 + c^2 = \left(\frac{\delta}{t} + \delta' t\right)^2,$$

c'est-à-dire que les équations (2) et (3) seront vérifiées par des valeurs rationnelles, quelle que soit la valeur rationnelle de t.

Reste à considérer l'équation (1), qui devient

$$\left(\frac{\gamma}{t} - \gamma' t\right)^2 + \left(\frac{\delta}{t} - \delta' t\right)^2 = p^2,$$

ou, en ayant égard à ce que $c^2 = 4\gamma\gamma' = 4\delta\delta'$,

$$(4) \qquad \frac{\gamma^2 + \delta^2}{t^2} + (\gamma'^2 + \delta'^2)t^2 - c^2 = p^2.$$

On peut satisfaire à l'équation précédente en posant

$$\frac{\gamma^2 + \delta^2}{t^2} = p^2$$

et

$$(\gamma'^2 + \delta'^2)t^2 - c^2 = 0.$$

On déduit de cette dernière équation

$$t = \frac{c}{\sqrt{\gamma'^2 + \delta'^2}};$$

mais

$$\gamma'^2 + \delta'^2 = (\alpha^2 - 6^2)^2 [(\alpha^2 - 6^2)^2 + 4\alpha^2 6^2] = (\alpha^4 - 6^4)^2;$$

donc

$$t = \frac{c}{\alpha^4 - 6^4} = \frac{2(\alpha^2 - 6^2)\sqrt{2\alpha 6}}{\alpha^4 - 6^4} = \frac{2\sqrt{2\alpha 6}}{\alpha^2 + 6^2}.$$

Cette valeur de l'indéterminée t donne, pour les arêtes a, b, c, les expressions ci-après :

$$a = \frac{\alpha^4 - 6^4}{2\sqrt{2\alpha 6}} - \frac{4\alpha 6(\alpha^2 - 6^2)\sqrt{2\alpha 6}}{\alpha^2 + 6^2},$$

$$b = \frac{\alpha 6(\alpha^2 + 6^2)}{\sqrt{2\alpha 6}} - \frac{2(\alpha^2 - 6^2)^2\sqrt{2\alpha 6}}{\alpha^2 + 6^2},$$

$$c = 2\sqrt{2\alpha 6}(\alpha^2 - 6^2).$$

On fera disparaître le radical et les dénominateurs qui figurent dans ces expressions en les multipliant par $2(\alpha^2 + 6^2)\sqrt{2\alpha 6}$.

Désignant par A, B, C les arêtes dont le point de concours est au sommet du trièdre trirectangle, et qui sont mesurées par des nombres entiers et vérifiant les équations (1), (2), (3), on a

$$A = (\alpha^2 - 6^2)[(\alpha^2 + 6^2)^2 - 16\alpha^2 6^2],$$

$$B = 2\alpha 6[(\alpha^2 + 6^2)^2 - 4(\alpha^2 - 6^2)^2],$$

$$C = 8\alpha 6(\alpha^4 - 6^4).$$

On trouvera, pour les trois autres arêtes,

$$P = (\alpha^2 + 6^2)^3,$$

$$Q = (\alpha^2 - 6^2)[(\alpha^2 + 6^2)^2 + 16\alpha^2 6^2],$$

$$R = 2\alpha 6[(\alpha^2 + 6^2)^2 + 4(\alpha^2 - 6^2)^2].$$

Les nombres α, 6 sont indéterminés, mais ils ne peuvent être égaux. Si l'on fait $\alpha = 2$ et $6 = 1$, on a la solution

$$
\begin{aligned}
A &= 117,\\
B &= 44,\\
C &= 240,\\
P &= 125,\\
Q &= 267,\\
R &= 244.
\end{aligned}
$$

Note du rédacteur. — Cette solution numérique $A = 117$, $B = 44$, $C = 240$ se trouve aussi dans l'*Algèbre* d'Euler, t. II, p. 234; mais elle n'est pas, comme ici, comprise dans des formules qui donnent une infinité d'autres solutions de la question proposée.

Il ne serait pas sans intérêt de savoir si les nombres 117, 44, 240 représentent les plus petites valeurs entières que l'on puisse attribuer aux arêtes A, B, C, sous la condition que les trois autres arêtes P, Q, R soient, de même, mesurées par des nombres entiers. (G).