Nouvelles annales de mathématiques

G.-H. Niewenglowski

Combinaisons complètes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 285-289

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__285_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

COMBINAISONS COMPLÈTES;

PAR M. G.-H. NIEWENGLOWSKI,
Professeur de Mathématiques à Paris.

Les combinaisons complètes (*), ou combinaisons avec répétition, de m lettres prises deux à deux, trois à trois,..., sont les produits dans lesquels les mêmes lettres peuvent se trouver répétées plusieurs fois comme facteurs. L'ordre de ces facteurs étant indifférent dans les

(*) *Voir* les *Nouvelles Annales*, 1re série, t. I, article de M. LEVRET, et 2e série, t. IX, p. 168.

combinaisons, on peut, au lieu de *aaba*, écrire *aaab*, ou plus simplement $a^3 b$. Ainsi, les combinaisons complètes des trois a, b, c, prises trois à trois, sont

$$a^3,\quad a^2 b,\quad a^2 c,\quad ab^2,\quad ac^2,\quad abc,\quad b^3,\quad b^2 c,\quad bc^2,\quad c^3.$$

Pour trouver le nombre des combinaisons complètes, remarquons que, d'après un théorème des combinaisons simples, on a

$$C_m^{n+1} + C_m^n = C_{m+1}^{n+1},$$
$$C_{m-1}^{n+1} + C_{m-1}^n = C_m^{n+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$C_n^n = C_{n+1}^{n+1},$$

d'où

$$(1)\qquad C_m^n + C_{m-1}^n + C_{m-2}^n + \ldots + C_n^n = C_{m+1}^{n+1}.$$

Cela posé, rien de plus facile que de former les combinaisons complètes de différents ordres les unes après les autres, et d'en avoir le nombre.

En effet, soient m lettres placées en ligne droite dans l'ordre alphabétique

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\ldots,\quad k,\quad l.$$

Les combinaisons complètes de ces m lettres, prises deux à deux, forment le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccccc}
a^2, & ab, & ac, & ad,\ldots, & ak, & al,\\
 & b^2, & bc, & bd,\ldots, & bk, & bl,\\
 & & c^2, & cd,\ldots, & ck, & cl,\\
 & & & d^2,\ldots, & dk, & dl,\\
 & & & \ldots\ldots & \ldots & \ldots,\\
 & & & & k^2, & kl,\\
 & & & & & l^2.
\end{array}$$

Il est évident que le nombre des combinaisons complètes, qui forment la première ligne du tableau, est exprimé par C_m^1;

Celui de la seconde ligne est exprimé par C_{m-1}^1;

Les autres sont donnés par $C_{m-2}^1, C_{m-3}^1, \ldots, C_1^1$.

Par conséquent, le nombre de toutes ces combinaisons est égal à la somme

$$C_m^1 + C_{m-1}^1 + C_{m-2}^1 + \ldots + C_1^1 = C_{m+1}^2.$$

Si donc on désigne par K_m^2 le nombre des combinaisons complètes des m lettres, prises deux à deux, on aura

$$K_m^2 = C_{m+1}^2.$$

Maintenant, pour former les combinaisons complètes des m lettres prises trois à trois, il suffit d'écrire la lettre a dans toutes les combinaisons déjà obtenues; la lettre b dans toutes celles où la lettre a n'entre pas; la lettre c dans toutes celles où les deux lettres a et b n'entrent pas, et ainsi de suite, ce qui donne

$$\begin{array}{rrrrrr}
a^3, & a^2b, & a^2c, & a^2d,\ldots, & a^2k, & a^2l, \\
 & ab^2, & abc, & abd,\ldots, & abk, & abl, \\
 & & ac^2, & acd,\ldots, & ack, & acl, \\
 & & & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots, \\
 & & & & ak^2, & akl, \\
 & & & & & al^2, \\
 & b^3, & b^2c, & b^2d,\ldots, & b^2k, & b^2l, \\
 & & bc^2, & bcd,\ldots, & bck, & bcl, \\
 & & & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots, \\
 & & & & bk^2, & bkl, \\
 & & & & & bl^2, \\
 & & & & k^3, & k^2l, \\
 & & & & & kl^2, \\
 & & & & & l^3.
\end{array}$$

Le nombre des combinaisons complètes formées avec la lettre a, d'après ce qui précède, est exprimé par $K^2_m = C^2_{m+1}$.

De même, le nombre des combinaisons complètes formées avec la lettre b, dans lesquelles la lettre a n'entre pas, est donné par $K^2_{m-1} = C^2_m$; les combinaisons complètes formées avec la lettre c, dans lesquelles les deux lettres a, b n'entrent pas, sont au nombre représenté par $K^2_{m-2} = C^2_{m+1}$, et ainsi de suite. Le dernier groupe n'a qu'une combinaison, et est représenté, pour uniformité, par C^2_2; par conséquent, le nombre de toutes ces combinaisons est égal à la somme

$$C^2_{m+1} + C^2_m + C^2_{m-1} + \ldots + C^2_2 = C^3_{m+2},$$

ce qui donne

$$K^3_m = C^3_{m+2}.$$

Nous en concluons, par analogie, la formule générale

$$(2) \qquad K^n_m = C^n_{m+n-1}.$$

Or, si cette formule est vraie pour les combinaisons complètes des m lettres, n à n, elle sera aussi vraie pour celles des m lettres, $n+1$ à $n+1$. En effet, formons ces dernières : il suffit pour cela d'écrire la lettre a dans toutes les combinaisons déjà obtenues, dont le nombre est C^n_{m+n-1}; de mettre la lettre b dans toutes celles dans lesquelles la lettre a n'entre pas, et qui sont au nombre de C^n_{m+n-2}; d'écrire la lettre c dans toutes les combinaisons déjà obtenues, dans lesquelles les deux lettres a, b n'entrent pas, et qui sont au nombre de C^n_{m+n-3}, et ainsi de suite. On voit que le nombre des combinaisons complètes des m lettres, prises $n+1$ à $n+1$, est égal à la somme

$$C^n_{m+n-1} + C^n_{m+n-2} + C^n_{m+n-3} + \ldots + C^n_n = C^{n+1}_{m+n};$$

par conséquent,

$$K_m^{n+1} = C_{m+n}^{n+1};$$

donc la formule (2) est générale.

Nous avons ainsi montré comment on peut former les combinaisons complètes, et quel en est le nombre.