Nouvelles annales de mathématiques

L. Painvin

Note sur la méthode d'élimination de Bezout

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 278-285

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__278_1>

NOTE SUR LA MÉTHODE D'ÉLIMINATION DE BEZOUT;

PAR M. L. PAINVIN.

Le principe de la méthode d'élimination de Bezout (*) conduit, dans le cas de deux équations, à une règle simple qu'on peut énoncer ainsi :

« Soient d'abord deux équations du même degré

$$(1)\qquad A = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

$$(2)\qquad B = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m = 0;$$

(*) *Théorie générale des équations algébriques,* par BEZOUT, p. 300. La méthode indiquée par Bezout à l'endroit cité est identique avec la méthode d'Euler; mais il est facile de voir que la règle énoncée peut se ramener à la règle qu'on donne habituellement.

on forme les combinaisons suivantes des deux équations données :

$$
(3)\quad \left\{
\begin{array}{l}
b_0 \mathrm{A} - a_0 \mathrm{B} = 0, \\
(b_0 x + b_1)\mathrm{A} - (a_0 x + a_1)\mathrm{B} = 0, \\
(b_0 x^2 + b_1 x + b_2)\mathrm{A} - (a_0 x^2 + a_1 x + a_2)\mathrm{B} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
(b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1})\mathrm{A} \\
\quad - (a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1})\mathrm{B} = 0;
\end{array}
\right.
$$

on a ainsi m équations du $(m-1)^{ième}$ degré; le *résultant* des équations (1) et (2) s'obtiendra en égalant à zéro le déterminant du système formé par ces m équations.

» Si les équations proposées sont de degrés différents, soit, par exemple,

$$
(1') \qquad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0,
$$

$$
(2') \qquad b_n x^{m-n} + b_{n+1} x^{m-n-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m = 0,
$$

on complétera la seconde équation par l'adjonction des termes

$$
b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{n-1} x^{m-n+1},
$$

en supposant

$$
b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0,
$$

et l'on appliquera la règle précédente. Seulement il faudra supprimer, dans le résultat obtenu, le facteur étranger a_0^n qui se présente à cause de l'introduction de n racines infinies par la modification apportée à l'équation (2'). »

2. Cette règle donne l'équation finale sous la forme d'un déterminant; on a fait peu de remarques sur la loi de formation de ses différents termes, et ces remarques, déduites d'ailleurs par analogie, ne conduisent pas à l'expression explicite d'un élément quelconque de ce déterminant.

Habituellement on établit deux règles différentes, suivant que les équations proposées sont ou ne sont pas du même degré; l'énoncé que j'ai donné ramène la méthode d'élimination à une règle unique.

Je me propose de faire connaître l'expression explicite d'un quelconque des éléments du déterminant-résultant; on aura alors une formule générale qui permettra d'écrire le résultant sans avoir à refaire, pour chaque cas, les calculs indiqués dans les combinaisons (3).

3. La règle énoncée en commençant conduit à m équations du degré $(m-1)$; les éléments du déterminant-résultant seront les coefficients des diverses puissances de x dans ces équations ordonnées.

Les éléments de la ligne de rang p seront les coefficients de la $p^{ième}$ des équations (3), savoir :

$$\begin{gathered}(b_0x^{p-1}+b_1x^{p-2}+\ldots+b_{p-1})\mathrm{A}\\ -(a_0x^{p-1}+a_1x^{p-2}+\ldots+b_{p-1})\mathrm{B}=0.\end{gathered}$$

Cette équation peut s'écrire

$$\left.\begin{aligned}&(b_0x^{p-1}+b_1x^{p-2}+\ldots+b_{p-1})[(a_0x^{p-1}+a_1x^{p-2}+\ldots+a_{p-1})x^{m-p+1}\\&\qquad\qquad+a_px^{m-p}+\ldots+a_m]\\-&(a_0x^{p-1}+a_1x^{p-2}+\ldots+a_{p-1})[(b_0x^{p-1}+b_1x^{p-2}+\ldots+b_{p-1})x^{m-p+1}\\&\qquad\qquad+b_px^{m-p}+\ldots+b_m]\end{aligned}\right\}=0;$$

elle se réduit visiblement à

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&(a_px^{m-p}+a_{p+1}x^{m-p-1}+\ldots+a_m)(b_0x^{p-1}+b_1x^{p-2}+\ldots+b_{p-1})\\-&(b_px^{m-p}+b_{p+1}x^{m-p-1}+\ldots+b_m)(a_0x^{p-1}+a_1x^{p-2}+\ldots+a_{p-1})\end{aligned}\right\}=0.$$

Le terme de rang q, dans la ligne de rang p, sera le coefficient de x^{m-q} dans l'équation (4). Pour obtenir ce terme, considérons, dans l'équation (4), le premier produit; renversons l'ordre des termes du multiplicande, et écrivons le premier terme $b_0 x^{p-1}$ du multiplicateur au-dessous du terme de degré $(m - p - q + 1)$ dans le multiplicande, ce qui donne la disposition

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{lll} a_m + \ldots + a_{p+q-1} x^{m-p-q+1} + \ldots + a_q x^{m-q} + \ldots + a_p x^{m-p}, \\ \qquad\qquad b_0 x^{p-1} \qquad\qquad + \ldots + b_{p-1}. \end{array} \right.$$

Le coefficient de x^{m-q} sera la somme des coefficients des termes qui se correspondent verticalement.

Or, si l'on pose

$$(6) \qquad A_{ij} = a_i b_j - a_j b_i = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix},$$

et si l'on désigne par α_{pq} le coefficient du terme de rang q dans la $p^{ième}$ des équations (3), on aura évidemment, d'après ce qui vient d'être dit,

$$(7) \quad \alpha_{pq} = A_{p+q-1,0} + A_{p+q-2,1} + A_{p+q-3,2} + \ldots + A_{q,p-1}.$$

On voit que, si $p + q - 1 > m$, il n'y aura pas de termes du multiplicande placés au-dessus des termes $b_0 x^{p-1}$, $b_1 x^{p-2}$,... du multiplicateur, puisque le premier terme à gauche du multiplicande est a_m; le premier terme de la somme α_{pq} sera donc celui pour lequel le premier indice est au plus égal à m.

On remarque encore que le second indice du dernier terme de α_{pq} n'est jamais supérieur à $(p-1)$; si p est inférieur à q, ce dernier terme existera dans α_{pq}; si p est supérieur à q, les derniers termes de α_{pq} seront nuls; le premier des termes non nuls, en s'avançant vers la gauche, sera $A_{p,q-1}$. D'ailleurs on peut ne pas se préoccuper des derniers termes de α_{pq}, car, lorsque p est supérieur à q, les termes écrits d'après la loi de formation indiquée dans la formule (7) et se trouvant au delà de

$A_{p,q-1}$ se détruiront identiquement; ils sont, en effet,

$$A_{p-1,q}+A_{p-2,q+1}+A_{p-3,q+2}+\ldots+A_{q+2,p-3}+A_{q+1,p-2}+A_{q,p-1};$$

or il est visible que $A_{ij}=-A_{ji}$; donc....

4. Il résulte de ce qui précède la formule générale suivante :

Étant données les deux équations

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m=0,\\ b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m=0,\end{cases}$$

si l'on pose

$$\text{(II)}\qquad A_{ij}=a_ib_j-a_jb_i=\begin{vmatrix} a_i & b_i\\ a_j & b_j\end{vmatrix},$$

puis

$$\text{(III)}\quad \alpha_{pq}=A_{p+q-1,0}+A_{p+q-2,1}+A_{p+q-3,2}+\ldots+A_{q,p-1},$$

le résultat de l'élimination de x entre les deux équations (I) *sera*

$$\text{(IV)}\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1m}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \ldots & \alpha_{mm}\end{vmatrix}=0.$$

Remarque I. — Dans la formule (III), les premiers indices ne doivent jamais être supérieurs à m : on devra donc omettre les termes dans lesquels le premier indice est plus grand que m. Le deuxième indice n'est jamais supérieur à $p-1$. La somme des deux indices est égale à $(p+q-1)$.

Remarque II. — Lorsque les équations (I) ne sont pas du même degré, si la seconde, par exemple, est

$$b_nx^{m-n}+b_{n+1}x^{m-n-1}+\ldots+b_m=0,$$

on peut toujours appliquer la formule générale qui précède en introduisant les hypothèses ·

$$b_0=b_1=b_2=\ldots=b_{n-1}=0;$$

seulement il faudra supprimer le facteur a_0^n qui se présentera dans l'équation (IV) et qui est étranger à la question.

Remarque III. — Le déterminant (IV) est un déterminant symétrique, c'est-à-dire que

$$\text{(V)} \qquad \alpha_{pq} = \alpha_{qp}.$$

On a, effet,

$$(1^\circ) \qquad \alpha_{pq} = A_{p+q-1,0} + A_{p+q-2,1} + \ldots + A_{q,p-1};$$

$$(2^\circ) \qquad \alpha_{qp} = A_{q+p-1,0} + A_{q+p-2,1} + \ldots + A_{p,q-1}.$$

Supposons, par exemple, $p > q$; les premiers termes des expressions (1°) et (2°) sont évidemment égaux jusqu'au terme $A_{p,q-1}$, inclusivement, qui est le dernier terme de α_{qp}; à partir de là, les termes restants dans α_{pq} sont

$$A_{p-1,q} + A_{p-2,q+1} + A_{p-3,q+2} + \ldots + A_{q+2,p-3} + A_{q+1,p-2} + A_{q,p-1};$$

Or cette somme est évidemment nulle, puisque $A_{ij} = -A_{ij}$; donc $\alpha_{qp} = \alpha_{qp}$.

5. Appliquons cette règle au système des deux équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 x^6 + a_1 x^5 + a_2 x^4 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x + a_6 = 0, \\ b_0 x^6 + b_1 x^5 + b_2 x^4 + b_3 x^3 + b_4 x^2 + b_5 x + b_6 = 0. \end{array} \right.$$

La formule (III) donne, immédiatement et sans calcul,

$$\begin{array}{llll}
\alpha_{11} = A_{10}, & & & \\
\alpha_{12} = A_{20}, & \alpha_{22} = A_{30} + A_{21}, & & \\
\alpha_{13} = A_{30}, & \alpha_{23} = A_{40} + A_{31}, & \alpha_{33} = A_{50} + A_{41} + A_{32}, & \\
\alpha_{14} = A_{40}, & \alpha_{24} = A_{50} + A_{41}, & \alpha_{34} = A_{60} + A_{51} + A_{42}, & \\
\alpha_{15} = A_{50}, & \alpha_{25} = A_{60} + A_{51}, & \alpha_{35} = \quad + A_{61} + A_{52}, & \\
\alpha_{16} = A_{60}; & \alpha_{26} = \quad + A_{61}; & \alpha_{36} = \qquad + A_{62}; & \\
\alpha_{44} = A_{61} + A_{52} + A_{43}, & & & \\
\alpha_{45} = \quad + A_{62} + A_{53}, & \alpha_{55} = A_{63} + A_{54}, & & \\
\alpha_{46} = \qquad + A_{63}; & \alpha_{56} = \quad + A_{64}, & \alpha_{66} = A_{65}. &
\end{array}$$

Le résultat de l'élimination est donc

$$(2)\quad \begin{vmatrix} A_{10} & A_{20} & A_{30} & A_{40} & A_{50} & A_{60} \\ A_{20} & A_{30}+A_{21} & A_{40}+A_{31} & A_{50}+A_{41} & A_{60}+A_{51} & A_{61} \\ A_{30} & A_{40}+A_{31} & A_{50}+A_{41}+A_{32} & A_{60}+A_{51}+A_{42} & A_{61}+A_{52} & A_{62} \\ A_{40} & A_{50}+A_{41} & A_{60}+A_{51}+A_{42} & A_{61}+A_{52}+A_{43} & A_{62}+A_{53} & A_{63} \\ A_{50} & A_{60}+A_{51} & A_{61}+A_{52} & A_{62}+A_{53} & A_{63}+A_{54} & A_{64} \\ A_{60} & +A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Maintenant supposons, par exemple,

$$(3)\qquad b_0 = 0,\quad b_1 = 0,\quad b_2 = 0,$$

on a, dans ce cas,

$$(4)\quad \begin{cases} A_{10} = 0, & A_{20} = 0, & A_{12} = 0, \\ A_{k0} = -a_0 b_k, & A_{k1} = -a_1 b_k, & A_{k2} = -a_2 b_k, \quad \text{où } k > 2. \end{cases}$$

Introduisons ces hypothèses dans le résultant (2); on peut d'abord diviser la première ligne et la première colonne par $-a_0$; après cette suppression, ajoutons à la seconde ligne la première multipliée par a_1, on pourra encore diviser la seconde ligne par $-a_0$, et l'on obtiendra comme résultat définitif, après avoir ajouté à la seconde colonne la première multipliée par a_1 :

$$(5)\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & 0 \\ b_3 & -a_0 b_4 & -a_0 b_5 - a_1 b_4 - a_2 b_3 & -a_0 b_6 - a_1 b_5 - a_2 b_4 & -a_1 b_6 - a_2 b_5 & -a_2 b_6 \\ b_4 & -a_0 b_5 & -a_0 b_6 - a_1 b_5 - a_2 b_4 & -a_1 b_6 - a_2 b_5 + A_{43} & -a_2 b_6 + A_{53} & A_{63} \\ b_5 & -a_0 b_6 & -a_1 b_6 - a_2 b_5 & -a_2 b_6 + A_{53} & A_{63} + A_{54} & A_{64} \\ b_6 & 0 & -a_2 b_6 & A_{63} & A_{64} & A_{65} \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant, qu'on pourrait encore simplifier en combinant les lignes et les colonnes, est le résultant des deux équations

$$(6)\qquad \begin{cases} a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0, \\ b_3x^3 + b_4x^2 + b_5x + b_6 = 0. \end{cases}$$

Si l'on suppose $b_3 = 0$, on pourra diviser de nouveau par $-a_0$, et le déterminant (5), simplifié par l'addition convenable des lignes et des colonnes, se réduit à

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & b_4 & b_5 & b_6 & 0 \\ 0 & b_4 & -a_0b_5+a_1b_4 & -a_0b_6+a_2b_4 & 0 & 0 \\ b_4 & b_5 & -a_0b_6+a_2b_4 & -a_1b_6+a_2b_5+a_3b_4 & 0 & 0 \\ b_5 & b_6 & 0 & 0 & -a_3b_6+A_{54} & A_{64} \\ b_6 & 0 & 0 & 0 & A_{64} & A_{65} \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (7) est le résultat de l'élimination de x entre les deux équations

$$(8)\qquad \begin{cases} a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0, \\ b_4x^2 + b_5x + b_6 = 0. \end{cases}$$