NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CROSNIER

Foyers et directrices des surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 266-269

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__266_0>

FOYERS ET DIRECTRICES DES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. CROSNIER,
Professeur au lycée d'Auch.

Un foyer d'une surface du second ordre est le centre d'une sphère de rayon nul doublement tangente à la surface : la directrice est la droite qui joint les points de contact.

Soit

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x,y,z) = {} & Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 \\ & + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ & + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0 \end{aligned}\right.$$

l'équation de la surface. Je suppose que les axes coordonnés sont rectangulaires, mais quelconques; il n'y aurait pas plus de difficulté à considérer des axes obliques.

Soient α, β, γ les coordonnées d'un point, l'équation d'une sphère, de rayon nul, ayant ce point pour centre, est

$$S = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = 0,$$

et, pour que cette sphère soit doublement tangente à la surface (1), il faut que l'on puisse déterminer K de telle sorte que l'équation

$$(2)\qquad f(x,y,z) - KS = 0$$

représente un système de deux plans.

Or, pour qu'une équation du second ordre représente un système de deux plans, il faut : 1° que le déterminant des équations du centre soit nul; 2° que les plans du centre aient un point commun; 3° que ce point se trouve sur la surface elle-même.

Les équations du centre de la surface (2) sont

$$(A - K)x + B''y + B'z + C + K\alpha = 0,$$
$$B''x + (A' - K)y + Bz + C' + K\beta = 0,$$
$$B'x + By + (A'' - K)z + C'' + K\gamma = 0.$$

Annulons le déterminant de ces équations, nous avons

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A - K & B'' & B' \\ B'' & A' - K & B \\ B' & B & A'' - K \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation nous montre que K n'est autre chose que l'une des racines de l'équation en S; alors les plans du centre sont parallèles à une même droite, qui n'est autre chose que l'une des directions de cordes principales.

Passons à la seconde condition : elle sera satisfaite si nous exprimons que les plans du centre rencontrent un plan quelconque en un même point; nous prendrons l'un des plans coordonnés, par exemple $z = 0$, et nous trouverons la condition

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} A - K & B'' & C + K\alpha \\ B'' & A' - K & C' + K\beta \\ B' & B & C'' + K\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

La valeur K étant connue, cette équation est du premier degré en α, β, γ, et, par suite, le foyer se trouve dans un plan.

Les équations (3) et (4) expriment que la surface (2) a une infinité de centres en ligne droite et, par suite, qu'elle est du genre cylindre. Au lieu d'une sphère de rayon nul, on pourrait, sans changer les équations (3) et (4), prendre une sphère quelconque; d'où il résulte que le lieu des centres des sphères, qui coupent une surface du second ordre de telle sorte que l'on puisse faire passer un cylindre du deuxième degré par l'intersection, se compose de trois plans.

Ces plans ne dépendent pas des axes coordonnés; si donc on prend les axes de la surface pour axes coordonnés, l'équation (4) se simplifiera; si, de plus, on prend $K = A''$, l'équation se réduira à $y = 0$; par conséquent, les trois plans principaux que nous venons de trouver ne sont autre chose que les plans principaux de la surface.

Si l'on avait pris $K = A$ ou A', l'équation (4) aurait été identique, et il aurait fallu prendre l'une des deux autres équations analogues obtenues en exprimant que les plans du centre de la surface (2) se coupent sur l'un des autres plans coordonnés.

Si l'une des racines de l'équation en S était nulle, le plan correspondant serait rejeté à l'i fini.

Avant d'aller plus loin, nous remarquons que, l'équation (4) étant celle d'un plan principal lorsqu'on prend pour K l'une des racines de l'équation (3), si l'on élimine K entre elles, on aura l'ensemble des plans principaux.

Tout ce qui précède peut facilement s'appliquer dans le cas des axes obliques.

Arrivons à la troisième condition, c'est-à-dire à la condition nécessaire pour que la surface (2) passe par le point commun aux plans du centre.

L'équation (2), en tenant compte des équations du centre, se réduit à

$$(C+K\alpha)x+(C'+K\beta)y+(C''+K\gamma)z+F-K(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0;$$

pour $z = 0$ les équations du centre se réduisent à deux, et nous devons satisfaire aux équations

$$(A-K)x+B''y+C+K\alpha=0,$$
$$B''x+(A'-K)y+C'+K\beta=0,$$
$$(C+K\alpha)x+(C'+K\beta)y+F-K(\alpha^2+\beta'^2+\gamma'^2)=0;$$

on doit donc avoir

$$(5)\quad \begin{vmatrix} A-K & B'' & C+K\alpha \\ B'' & A'-K & C'+K\beta \\ C+K\alpha & C'+K\beta & F-K(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est du second degré; elle ne contient que γ^2; par suite, elle représente une surface du second ordre ayant son centre dans le plan des xy; elle coupe le plan (4) suivant une conique, et le lieu des foyers se compose de trois coniques respectivement situées dans les plans principaux de la surface proposée.

On pourrait remplacer les équations (4) et (5) par une infinité d'autres équivalentes : si l'on prend pour K, α, β, γ des valeurs satisfaisant aux équations (3), (4) et (5), deux des équations du centre de la surface (2) représenteront la directrice correspondant au foyer considéré; la surface (2) représentera elle-même les deux plans qui passent par l'intersection de la surface (1) et de la sphère. Pour que ces plans soient réels, il faut que leur trace sur l'un des plans coordonnés soit du genre hyperbole; il est facile de voir que cela exige que K soit la racine moyenne de l'équation en S; il est évident que ces plans ne peuvent couper la surface.

On traiterait absolument de la même manière le cas où l'on demanderait le lieu des centres des sphères de rayon donné, doublement tangentes à la surface. Les équations (3) et (4) ne changeraient pas; mais, dans l'équation (5), on aurait à remplacer γ^2 par $\gamma^2 - r^2$: le lieu se composerait donc encore d'un système de trois coniques.

Le lieu des directrices s'obtient en éliminant α, β, γ entre les équations du centre et l'équation (2); on trouve

$$f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2 - Kf(x, y, z) = 0,$$

qui représente un cylindre.