A. PICART

Problème de Huyghens

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 212-219

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__212_1>

PROBLÈME DE HUYGHENS;

Par M. A. PICART.

Soient tant de corps qu'on voudra parfaitement élastiques et rangés en ligne droite : le premier vient choquer le second avec une vitesse donnée v; le deuxième, avec la vitesse communiquée par le premier, choque le troisième; celui-ci avec sa vitesse acquise choque le quatrième et ainsi de suite; les masses du premier et du dernier étant données, trouver celles que doivent avoir les corps intermédiaires, pour que le dernier reçoive la plus grande vitesse possible.

Ce problème a été proposé et résolu pour la première fois par Huyghens (1669), dans le cas particulier de trois corps. D'autres géomètres ont étendu sa solution à un nombre quelconque de corps, mais sans se préoccuper des caractères analytiques qui assurent l'existence du maximum ou du minimum. Lagrange, le premier (*Mémoires de Turin*, 1759), démontra, dans le cas général, l'existence du maximum, en appliquant à ce problème une méthode nouvelle de recherche des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables. Seulement il se borna à vérifier les conditions du maximum pour trois masses intermédiaires, en ajoutant : « Au reste, dans ce problème, quel que soit le nombre des masses, on trouvera les conditions du maximum toutes remplies, si l'on veut bien prendre la peine de pousser plus loin le calcul. » C'est cette généralisation que je me propose de faire ici pour un nombre quelconque n de masses intermédiaires.

Soient a la masse du premier corps, b celle du dernier, soient ensuite x_1, x_2, ..., x_n les masses intermédiaires inconnues. En se rappelant que, dans le choc de deux corps élastiques, la quantité de mouvement et la force vive restent les mêmes avant et après le choc, on trouvera que la vitesse communiquée par le premier corps a au deuxième x_1 est égale à $\frac{v\,2a}{a+x_1}$: que celle que donne celui-ci au troisième x_2 est égale à $\frac{v\,2a\,2x_1}{(a+x_1)(x_1+x_2)}$, et ainsi de suite, de telle sorte que la vitesse reçue par le dernier b sera exprimée par

$$\frac{v\,2a\,2x_1\,2x_2\,2x_3\ldots 2x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)},$$

et que la fonction dont il s'agit de trouver le maximum est

$$Z = \frac{x_1\,x_2\,x_3\ldots x_{n-1}\,x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)}.$$

Il faut égaler à zéro les dérivées partielles du premier ordre de cette fonction. Or on a

$$lZ = lx_1 + lx_2 + \ldots + lx_n - l(a+x_1) - l(x_1+x_2) - \ldots - l(x_n+b),$$

d'où l'on tire

$$\frac{Z'_{x_1}}{Z} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{a+x_1} - \frac{1}{x_1+x_2},$$

$$\frac{Z'_{x_2}}{Z} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1+x_2} - \frac{1}{x_2+x_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{Z'_{x_p}}{Z} = \frac{1}{x_p} - \frac{1}{x_{p-1}+x_p} - \frac{1}{x_p+x_{p+1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{Z'_{x_n}}{Z} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}+x_n} - \frac{1}{x_n+b},$$

ou

$$\frac{Z'_{x_1}}{Z} = \frac{a x_2 - x_1^2}{x_1(a + x_1)(x_1 + x_2)},$$
$$\frac{Z'_{x_2}}{Z} = \frac{x_1 x_3 - x_2^2}{x_2(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{Z'_{x_p}}{Z} = \frac{x_{p-1} x_{p+1} - x_p^2}{x_p(x_{p-1} + x_p)(x_p + x_{p+1})},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{Z'_{x_n}}{Z} = \frac{x_{n-1} b - x_n^2}{x_n(x_{n-1} + x_n)(x_n + b)}.$$

Donc, pour le maximum ou le minimum, on doit avoir

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{r} a x_2 - x_1^2 = 0, \\ x_1 x_3 - x_2^2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{p-1} x_{p+1} - x_p^2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-1} b - x_n^2 = 0, \end{array}\right.$$

ou

$$\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots = \frac{x_{p-1}}{x_p} = \frac{x_p}{x_{p+1}} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{b},$$

d'où l'on voit que toutes les masses doivent constituer une progression géométrique, dont les deux extrêmes sont les masses données a et b. Pour juger à présent du maximum ou du minimum, il faut considérer la fonction homogène du second degré

$$Z''_{x_1^2} h_1^2 + Z''_{x_2^2} h_2^2 + \ldots + Z''_{x_p^2} h_p^2 + \ldots + Z''_{x_n^2} h_n^2 + 2 Z''_{x_1 x_2} h_1 h_2 + \ldots$$
$$+ 2 Z''_{x_p x_q} h_p h_q + \ldots + 2 Z''_{x_{n-1} x_n} h_{n-1} h_n,$$

et voir si les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que donnent les équations (1), étant introduites dans les coefficients, cette fonction reste toujours négative ou toujours positive pour toutes les valeurs possibles des quantités h_1, $h_2, \ldots, h_n$. Soit fait, pour abréger,

$$\frac{Z}{x_1(a+x_1)(x_1+x_2)} = \alpha_1,$$
$$\frac{Z}{x_2(x_1+x_2)(x_2+x_3)} = \alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{Z}{x_p(x_{p-1}+x_p)(x_p+x_{p+1})} = \alpha_p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{Z}{x_n(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)} = \alpha_n,$$

on aura

$$Z'_{x_1} = \alpha_1(ax_2 - x_1^2),$$
$$Z'_{x_2} = \alpha_2(x_1x_3 - x_2^2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Z'_{x_p} = \alpha_p(x_{p-1}x_{p+1} - x_p^2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Z'_{x_n} = \alpha_n(x_{n-1}b - x_n^2),$$

d'où l'on tire, en tenant compte des équations (1),

$$\begin{array}{ll}
Z''_{x_1^2} = -2\alpha_1 x_1, & Z''_{x_1x_2} = a\alpha_1, \\
Z''_{x_2^2} = -2\alpha_2 x_2, & Z''_{x_2x_3} = x_1\alpha_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & Z''_{x_3x_4} = x_2\alpha_3, \\
Z''_{x_p^2} = -2\alpha_p x_p, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & Z''_{x_px_{p+1}} = x_{p-1}\alpha_p, \\
Z''_{x_n} = -2\alpha_n x_n, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
 & Z''_{x_{n-1}x_n} = x_{n-2}\alpha_{n-1};
\end{array}$$

toutes les autres dérivées partielles du second ordre sont nulles.

La fonction homogène du second degré se réduit donc ici à la forme

$$A_1 h_1^2 + A_2 h_2^2 + \ldots + A_n h_n^2 + 2B_1 h_1 h_2 + 2B_2 h_2 h_3$$
$$+ 2B_3 h_3 h_4 + \ldots + 2B_{n-1} h_{n-1} h_n.$$

Pour qu'elle soit toujours négative, quelles que soient les valeurs des quantités $h_1, h_2, \ldots, h_n$, il faut d'abord que l'on ait $A_1 < 0$. En la mettant sous la forme

$$A_1 \left(h_1 + \frac{B_1 h_2}{A_1}\right)^2 + \left(A_2 - \frac{B_1^2}{A_1}\right) h_2^2 + A_3 h_3^2 + \ldots + A_n h_n^2$$
$$+ 2B_2 h_2 h_3 + 2B_3 h_3 h_4 + \ldots + 2B_{n-1} h_{n-1} h_n,$$

on voit qu'on doit avoir de plus

$$A_2 - \frac{B_1^2}{A_1} < 0;$$

puis, en posant

$$A_2 - \frac{B_1^2}{A_1} = a_2$$

et faisant une transformation analogue,

$$A_3 - \frac{B_2^2}{a_2} < 0;$$

puis, en désignant cette quantité par a_3,

$$A_4 - \frac{B_3^2}{a_3} < 0,$$

et ainsi de suite. Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour le maximum.

Or, si l'on désigne par r la raison de la progression

$$a : x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_n : b,$$

on a

$$x_1 = ar, \quad x_2 = ar^2, \ldots, \quad x_p = ar^p, \ldots, \quad x_n = ar^n,$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{r^3}, \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_1}{r^6}, \quad \alpha_4 = \frac{\alpha_1}{r^9}, \ldots, \quad \alpha_n = \frac{\alpha_1}{r^{3(n-1)}};$$

par suite la fonction homogène du second degré prend la forme

$$-2a\alpha_1 rh_1^2 - \frac{2a\alpha_1}{r}h_2^2 - \frac{2a\alpha_1}{r^3}h_3^2 - \ldots - \frac{2a\alpha_1}{r^{2p-3}}h_p^2 - \ldots$$

$$-\frac{2a\alpha_1}{r^{2n-3}}h_n^2 + 2a\alpha_1 h_1 h_2 + \frac{2a\alpha_1}{r^2}h_2 h_3 + \frac{2a\alpha_1}{r^4}h_3 h_4 + \ldots$$

$$+\frac{2a\alpha_1}{r^{2p-2}}h_p h_{p+1} + \ldots + \frac{2a\alpha_1}{r^{2n-4}}h_{n-1}h_n,$$

ou

$$2a\alpha_1\left(-rh_1^2 - \frac{1}{r}h_2^2 - \frac{1}{r^3}h_3^2 - \ldots - \frac{1}{r^{2n-3}}h_n^2 + h_1 h_2 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2}h_2 h_3 + \frac{1}{r^4}h_3 h_4 + \ldots + \frac{1}{r^{2n-4}}h_{n-1}h_n\right).$$

Comme $2a\alpha_1$ est une quantité essentiellement positive, on peut supprimer ce facteur, et alors les conditions à vérifier pour le maximum sont

$$a_1 = -r < 0,$$

$$a_2 = -\frac{1}{r} - \frac{1}{4a_1} < 0,$$

$$a_3 = -\frac{1}{r^3} - \frac{1}{4r^4 a_2} < 0,$$

$$a_4 = -\frac{1}{r^5} - \frac{1}{4r^8 a_3} < 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{n-1} = -\frac{1}{r^{2n-5}} - \frac{1}{4r^{4n-12}a_{n-2}} < 0,$$

$$a_n = -\frac{1}{r^{2n-3}} - \frac{1}{4r^{4n-8}a_{n-1}} < 0.$$

Comme a_1 est du premier degré par rapport à r, on voit que a_2 est du degré -1, a_3 du degré -3, a_p du

degré $-(2p-3)$, de sorte que ces inégalités, divisées respectivement par $r, \frac{1}{r}, \frac{1}{r^3}, \frac{1}{r^5}, \ldots, \frac{1}{r^{2n-3}}$, peuvent s'écrire

$$b_1 = -1 < 0,$$

$$b_2 = -1 - \frac{1}{4b_1} < 0,$$

$$b_3 = -1 - \frac{1}{4b_2} < 0,$$

$$b_4 = -1 - \frac{1}{4b_3} < 0,$$

$$b_5 = -1 - \frac{1}{4b_4} < 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$b_{n-1} = -1 - \frac{1}{4b_{n-2}} < 0,$$

$$b_n = -1 - \frac{1}{4b_{n-1}} < 0;$$

et, pour les vérifier, il faut trouver l'expression générale du $p^{ième}$ terme de la suite

$$b_1, \quad b_2, \ldots, \quad b_p, \quad b_{p+1}, \ldots, \quad b_n, \ldots,$$

sachant que $b_1 = -1$ et que

$$b_{p+1} = -1 - \frac{1}{4b_p}.$$

C'est là une équation aux différences finies que l'on résout facilement; on trouve

$$b_p = -\frac{p+1}{2p}.$$

Donc toutes les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_p$ sont négatives;

par suite la fonction homogène prend le signe — pour toutes les valeurs possibles de $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

Les valeurs en progression géométrique trouvées pour les masses intermédiaires correspondent donc au maximum de la vitesse du dernier corps. On peut arriver à cette conclusion d'une manière bien plus rapide.

Si l'on désigne par r la raison de la progression géométrique

$$a : x_1 : x_2 : \ldots : x_n : b,$$

on a

$$x_1 = ar, \quad x_2 = ar^2, \ldots, \quad x_n = ar^n,$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{r^3}, \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_1}{r^6}, \ldots, \quad \alpha_n = \frac{\alpha_1}{r^{3(n-2)}};$$

par suite la fonction homogène du second degré se réduit à la forme

$$-2a\alpha_1 \left[rh_1^2 + \frac{1}{r} h_2^2 + \frac{1}{r^3} h_3^2 + \ldots + \frac{1}{r^{2n-3}} h_n^2 + h_1 h_2 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2} h_2 h_3 + \frac{1}{r^4} h_3 h_4 + \ldots + \frac{1}{r^{2(n-2)}} h_{n-1} h_n \right],$$

ou

$$-2a\alpha_1 \left[\frac{r}{2} h_1^2 + \left(\sqrt{\frac{r}{2}} h_1 + \frac{1}{\sqrt{2r}} h_2 \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2r}} h_2 + \frac{1}{\sqrt{2r^3}} h_3 \right)^2 \right.$$
$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{2r^3}} h_3 + \frac{1}{\sqrt{2r^5}} h_4 \right)^2 + \ldots$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\sqrt{2r^{2n-5}}} h_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{2r^{2n-3}}} h_n \right)^2 + \frac{1}{2r^{2n-3}} h_n^2 \right],$$

et l'on voit qu'elle est négative pour toutes les valeurs possibles de $h_1, h_2, \ldots, h_n$.