NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHEVILLIET

Note sur le développement en série de arc sin x au moyen de la formule de MacLaurin

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 209-212

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__209_0>

NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE arc sin x AU MOYEN DE LA FORMULE DE MACLAURIN;

PAR M. CHEVILLIET,
Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

Il suffit de considérer le cas où x est positif.

On connaît la loi des coefficients; car, si l'on pose

$$f(x) = \operatorname{arc}\sin x,$$

on a, en général (BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 146),

$$\frac{f^{2n}(0)}{1.2.3\ldots 2n} = 0, \quad \frac{f^{2n-1}(0)}{1.2.3\ldots(2n-1)} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\frac{1}{2n-1},$$

ce qui permet d'écrire

$$\operatorname{arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots + \mathrm{R},$$

où

$$\mathrm{R} = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2.3\ldots n} f^{n+1}(\theta x),$$

en adoptant la troisième forme du reste; n est l'exposant de x dans le terme qui précède immédiatement R.

$f^{n+1}(\theta x)$ est donné par la formule (*ibid.*, p. 144)

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) = {} & \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n(1-x)^n\sqrt{1-x^2}} \\ & \times\Bigg[1 - \frac{1}{1}\frac{n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ & + \frac{1.3}{1.2}\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \\ & - \frac{1.3.5}{1.2.3}\frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \ldots \\ & \mp \frac{1.3.5}{1.2.3}\frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-3} \\ & \pm \frac{1.3.5}{1.2.3}\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-2} \\ & \mp \frac{1.3}{1.2}\frac{n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-1} \pm \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\Bigg], \end{aligned}$$

le signe supérieur correspondant au cas où n est pair, et le signe inférieur à celui où il est impair. Ici n est impair; par conséquent, il faut prendre le signe inférieur. On a donc

$$R = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\left(\frac{x-\theta x}{1-\theta x}\right)\frac{x}{\sqrt{1-\theta^2 x^2}}$$
$$\times\left[1-\frac{1}{1}\cdot\frac{n}{2n-1}\left(\frac{1-\theta x}{1+\theta x}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1}\frac{n}{2n-1}\left(\frac{1-\theta x}{1+\theta x}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\theta x}{1+\theta x}\right)^{n}\right].$$

Si n augmente indéfiniment, le premier facteur tend vers zéro, car son inverse

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$$
$$>1+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)$$

augmente indéfiniment. Le deuxième a aussi pour limite zéro, si x est inférieur à l'unité, ce qu'on doit supposer pour que la série soit convergente. Le troisième facteur reste fini.

Le quatrième également, comme nous allons essayer de le prouver. D'abord il est facile de voir, comme M. Bertrand l'a déjà montré (*ibid.*, p. 144), que les coefficients des différents termes dont il se compose vont en diminuant en valeur absolue jusqu'au milieu. Cela posé, nous disons que :

Si dans le polynôme

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} A_0 - A_1 z + A_2 z^n + \ldots \pm A_n z^n \mp A_n z^{n+1} + \ldots \\ \qquad - A_2 z^{2n-1} + A_1 z^{2n} - A_0 z^{2n+1}, \end{array}\right.$$

où les coefficients positifs $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ *vont en diminuant,* z *est positif et* < 1, *la valeur de ce polynôme est moindre que* A_0.

On peut en effet mettre (1) sous la forme

$$A_0(1-z^{2n+1})-A_1z(1-z^{2n-1})+A_2z^2(1-z^{2n-3})\ldots\pm A_nz^n(1-z),$$

ou, en mettant $1-z$ en facteur commun,

$$\begin{aligned}(1-z)\big[&A_0(1+z+z^2+\ldots+z^{2n})\\ &-A_1z(1+z+z^2+\ldots+z^{2n-2})\\ &+A_2z^2(1+z+z^2+\ldots+z^{2n-4})+\ldots-\pm A_nz^n\big].\end{aligned}$$

En ordonnant l'expression entre crochets, on a

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{l}\begin{array}{r|r|r|l} A_0+A_0 & z+A_0 & z^2+\quad\ldots+A_0 & z^n+\ldots\\ -A_1 & -A_1 & -A_1 & \\ & +A_2 & +A_2 & \\ & & \vdots & \\ & & \mp A_n & \end{array}\\ \\ \begin{array}{r|r|r|l} +A_0 & z^{2n-2}+A_0 & z^{2n-1}+A_0 & z^{2n}.\\ -A_1 & -A_1 & & \\ +A_2 & & & \end{array}\end{array}\right.$$

Or, d'après les hypothèses que nous avons faites, les coefficients des différentes puissances de z sont positifs, et, à l'exception des deux extrêmes, moindres que A_0, de sorte que l'expression (2) est moindre que

$$A_0(1+z+z^2+\ldots+z^{2n}),$$

moindre, *a fortiori*, que

$$A_0(1+z+z^2+\ldots)=\frac{A_0}{1-z};$$

donc le polynôme (1) est plus petit que A_0.

(Le cas où $z=1$ ne fait pas exception, car alors le polynôme est nul).

Dans le cas actuel $A_0=1$ et l'on a, par suite,

$$R<\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\left(\frac{x-\theta x}{1-\theta x}\right)^n\frac{x}{\sqrt{1-\theta^2x^2}},$$

qui tend vers zéro quand n augmente indéfiniment; donc

$$\text{arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{1.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots.$$