Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 201-206

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__201_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1018
(voir 2e série, t. X, p. 192);

PAR M. MORET-BLANC.

Si deux ellipses, de même centre et de mêmes axes en direction ont une aire égale, les angles excentriques au point commun sont complémentaires. Considérer le point limite où les ellipses s'approchent de la similitude; trouver le lieu du point limite d'intersection.

(A. WITWORTH).

Soient

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$$

les équations des deux ellipses, avec la relation

$$a'b' = ab = m^2.$$

Les équations peuvent s'écrire

$$a^4y^2 + m^4x^2 = a^2m^4, \quad a'^4y^2 + m^4x^2 = a'^2m^4,$$

d'où, pour les points communs,

$$y^2 = \frac{m^4}{a^2 + a'^2}, \quad x^2 = \frac{a^2a'^2}{a^2 + a'^2}.$$

Si φ et φ' sont les angles excentriques en l'un des points communs, on a

$$\cos^2\varphi = \frac{a'^2}{a^2 + a'^2}, \quad \cos^2\varphi' = \frac{a^2}{a^2 + a'^2} = \sin^2\varphi;$$

donc φ et φ' sont complémentaires.

Si les ellipses s'approchent indéfiniment de la similitude, a' tend vers a, et à la limite

$$x^2 = \frac{a^2}{2}, \quad y^2 = \frac{m^4}{2a^2}, = \frac{b^2}{2}.$$

Les points communs sont les extrémités des diamètres conjugués égaux.

On obtiendra le lieu de ces points limites en éliminant a^2 entre les deux équations précédentes. En les multipliant membre à membre, il vient

$$x^2y^2 = \frac{m^4}{4}, \quad xy = \pm\frac{m^2}{2}.$$

Le lieu se compose de deux hyperboles équilatères conjuguées ayant pour asymptotes les axes des ellipses, lieu des extrémités des diamètres conjugués égaux, et enveloppe des ellipses de surface donnée πm^2, ayant mêmes axes en direction (*voir* 2e série, t. VIII, p. 321).

Note.— M. Pellissier a, comme M. Moret-Blanc, résolu la question 1018, en rectifiant le premier énoncé de cette question. (*Voir* 2e série, t. X, p. 191.)

Question 1072

(voir 2e série, t. XI, p. 144);

Par M. FOURET,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

Une sphère de rayon constant se déplace en restant tangente à une droite et à un cylindre de révolution donnés; trouver le lieu du point de contact sur le cylindre.

(Mannheim.)

Cet énoncé peut se généraliser de la manière suivante:

Une sphère de rayon constant se déplace en restant tangente à deux cylindres de révolution donnés; trouver le lieu du point de contact sur l'un de ces cylindres.

Soient r le rayon de la sphère; a et b les rayons des cylindres que je désignerai respectivement par (A) et (B); d la plus courte distance de leurs axes; et γ l'un des angles que forment les directions de ces droites.

Pour chercher le lieu du point de contact de la sphère avec le cylindre (A), prenons pour axes des z et des x l'axe de (A) et la perpendiculaire commune aux axes de (A) et de (B). L'axe des y perpendiculaire aux deux autres se trouve déterminé.

x, y, z étant les coordonnées d'un point quelconque du lieu cherché, les coordonnées du centre de la sphère, de rayon r, tangente en ce point au cylindre (A), sont

$$x\frac{a\pm r}{a},\quad y\frac{a\pm r}{a},\quad z,$$

en prenant le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que la sphère est supposée d'un côté ou de l'autre du plan tangent au cylindre (A).

Nous exprimerons que cette sphère est tangente à (B) en écrivant que son centre est à une distance de l'axe de (B) égale à $b\pm r$, ce qui donne l'équation

$$(c)\quad \left(x\frac{a\pm r}{a}-d\right)^2+\left(y\frac{a\pm r}{a}\cos\gamma-z\sin\gamma\right)^2=(b\pm r)^2.$$

En remarquant que l'on peut combiner deux à deux les signes des binômes $(a\pm r)$ et $(b\pm r)$ de quatre manières différentes, on voit que cette équation représente quatre surfaces du second ordre qui, par leur intersection avec le cylindre (A), fournissent quatre courbes gauches du quatrième ordre constituant dans leur ensemble le lieu en question.

La forme de l'équation (c) montre que les surfaces qu'elle représente sont des cylindres elliptiques, ayant deux par deux les mêmes plans principaux représentés par les équations

$$x = \frac{ad}{a \pm r},$$

$$y = \frac{a \operatorname{tang} \gamma}{a \pm r} z.$$

Les sections droites de ces cylindres sont des ellipses dont les demi-axes ont pour longueurs

$$a \frac{b \pm r}{a \pm r} \quad \text{et} \quad a \frac{b \pm r}{\sqrt{a^2 \sin^2 \gamma + (a \pm r)^2 \cos^2 \gamma}}.$$

Ces éléments déterminent les cylindres d'une manière complète.

Pour avoir le lieu qui fait l'objet de la question 1072, il suffit de supposer que le cylindre (B) se réduit à son axe, c'est-à-dire que $b = 0$.

Les quatre cylindres elliptiques se réduisent alors à deux, et le lieu ne se compose plus que de deux courbes gauches du quatrième ordre. Celles-ci peuvent d'ailleurs être réelles ou imaginaires.

On voit aisément que :

Si $d < a$, les deux courbes sont réelles ;

Si $a < d < a + 2r$, la courbe correspondant aux sphères extérieures est seule réelle ;

Si $d > a + 2r$, les deux courbes sont imaginaires.

On peut enfin remarquer que la courbe, lieu des contacts des sphères intérieures, n'est jamais formée que d'un anneau unique, tandis que, dans le cas de $d < r$, la courbe correspondant aux sphères extérieures se compose de deux anneaux distincts.

Note.— La même question a été résolue par MM. Gambey et Moret-Blanc.

Question 1106

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 528),

PAR M. JAMET,

Élève du lycée de Bordeaux (classe de M. de Lagrandval).

Dans un paraboloïde hyperbolique, la génératrice de chaque système qui passe par le sommet est celle sur laquelle les génératrices de l'autre système interceptent les segments les plus petits. (A. TISSOT).

Soient

LA, L′B deux génératrices de l'un des systèmes (*);

xy une génératrice de l'autre;

P un plan parallèle au plan directeur de ce second système.

Si par le point A, où xy coupe LA, je mène AC parallèle à L′B, cette droite AC ira couper le plan P en un certain point C, situé sur l'intersection du plan P et du plan mené par LA, parallèlement à L′B; ou, ce qui revient au même, parallèlement au plan directeur du premier système. De plus, si L′ est la trace de L′B sur le plan P, on aura L′C $=$ AB, et le segment AB, intercepté par deux génératrices du premier système sur une génératrice du second, sera minimum quand L′C sera minimum, c'est-à-dire quand L′C sera perpendiculaire à l'intersection LC des deux plans directeurs; mais alors

---

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

AB, qui est parallèle à L'C, sera perpendiculaire à l'axe du paraboloïde, et, par suite, passera par le sommet.

Note. — La même question a été résolue par MM. Bourguet, Gambey, Dewulf, Moret-Blanc, Ylliac de Goïsel, Tourettes.

Question 1120

(voir 2e série, t. XII, p. 528);

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie.

Construire géométriquement une hyperbole équilatère, connaissant le centre, une tangente et un point.

(DE SAINT-GERMAIN.)

Cette construction se fait simplement au moyen du théorème suivant, qui est facile à démontrer :

Si, d'un point quelconque M *d'une hyperbole équilatère, on abaisse des perpendiculaires* MP, MQ *sur une tangente* AB *et sur le diamètre* OT, *mené du centre* O *au point de contact* T, *les distances* OP *et* OQ *sont égales.*

Pour la construction, abaisser du point donné M une perpendiculaire MP sur la tangente donnée AB; mener du point donné M une tangente MQ au cercle décrit du point O comme centre avec OP pour rayon, et joindre OQ qui rencontre AB au point de contact T.

Le point de contact de la tangente donnée étant connu, les asymptotes s'en déduisent immédiatement, etc.

Il y a, en général, deux solutions.

Note du Rédacteur. — La question 1120 a déjà été proposée (2e série, t. III, p. 445) et résolue (2e série, t. IV, p. 320); mais de toutes les solutions qu'on en a données, et qu'on peut en donner, celle de M. Moreau est assurément la plus simple; et puis le théorème d'où cette solution se déduit immédiatement nous semble mériter d'être remarqué. Quant à sa démonstration, nous laissons au lecteur le plaisir de la trouver.

(G.)
