Nouvelles annales de mathématiques

Solutions des questions proposées au concours général de 1873

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 18-34

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__18_1>

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1873.

Mathématiques spéciales.

Une surface du second ordre S *étant donnée, ainsi que deux points* A *et* B *sur cette surface, il existe une* *infinité de surfaces du second ordre Σ, qui sont tangentes en A et B à la surface S. On propose de trouver : 1° le lieu géométrique des centres des surfaces Σ; 2° le lieu géométrique des points de contact de ces surfaces avec les plans tangents qu'on peut leur mener parallèlement à un plan donné; 3° le lieu géométrique des points de contact de ces mêmes surfaces avec les plans tangents qu'on peut leur mener par une droite donnée.*

Prenons pour origine des coordonnées le point O, milieu de $AB = 2l$, pour plan des xy le plan diamétral conjugué de AB dans S, et la droite AB pour axe de z. L'équation de la surface S est

$$S = z^2 + Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y - l^2 = 0.$$

$\varphi(x, y)$ étant une fonction homogène du second degré en x et y, à trois coefficients arbitraires, l'équation générale des surfaces Σ est

$$\Sigma = S + \varphi = 0;$$

car $\varphi = 0$ représente deux plans menés par l'axe des z.

1° Les équations du centre sont les dérivées partielles de Σ par rapport à x, y, z, et le lieu des centres s'obtiendra en éliminant les paramètres variables de φ entre ces trois équations. Or, φ étant indépendant de z, le résultat de cette élimination est

$$\Sigma'_z = S'_z = z = 0;$$

le lieu des centres est le plan des xy.

2° Si l'on rend la fonction $S + \varphi$ homogène au moyen d'une variable t, φ est indépendant de t aussi bien que de z, et le théorème des fonctions homogènes donne

$$(1) \qquad x\Sigma'_x + y\Sigma'_y + zS'_z + tS'_t = 2(S + \varphi) = 0.$$

Étant donné un point de la surface dont les coordonnées satisfont à cette équation, le plan tangent en ce point

$$(2) \qquad X\Sigma'_x + Y\Sigma'_y + ZS'_z + tS'_t = 0$$

conservera une direction constante, si l'on a, en tenant compte de l'équation (1),

$$\frac{\Sigma'_x}{a} = \frac{\Sigma'_y}{b} = \frac{S'_z}{c} = \frac{-S'_t}{ax + by + cz},$$

a, b, c étant des constantes. Le lieu des points de contact s'obtiendra en éliminant les paramètres variables de φ entre ces trois équations. Or, la dernière égalité étant indépendante de φ, le résultat de l'élimination est

$$(ax + by + cz)\,S'_z + cS'_t = 0;$$

c'est un paraboloïde hyperbolique, qui passe par A et par B, et dont les plans directeurs sont le plan donné et le plan des xy.

3° Soient

$$\frac{x-p}{\alpha} = \frac{y-q}{\beta} = \frac{z-r}{\gamma}$$

les équations de la droite donnée. Pour que le plan tangent passe par cette droite, il faut que l'on ait

$$\alpha\Sigma'_x + \beta\Sigma'_y + \gamma S'_z = 0,$$
$$p\Sigma'_x + q\Sigma'_y + rS'_z + tS'_t = 0.$$

D'ailleurs

$$x\Sigma'_x + y\Sigma'_y + zS'_z + tS'_t = 0.$$

Le lieu du point de contact s'obtiendra en éliminant les paramètres variables de φ entre ces trois équations. Or seuls Σ'_x et Σ'_y les renferment; le résultat de l'élimination est donc

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma S'_z \\ p & q & rS'_z + S'_t \\ x & y & zS'_z + S'_t \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} S'_z + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ p & q & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} S'_t = 0;$$

c'est un hyperboloïde à une nappe, qui passe par A et par B, et dont la droite donnée est une génératrice.

CH. B.

Note. — Solutions analogues par MM. V. H. et Moret-Blanc.

Solution géométrique;

PAR M. ALBERT GENOUILLE.
Élève du lycée de Sens.

1. Au premier aspect, le lieu des centres n'est pas déterminé. En effet, les données reviennent à ceci : on connaît deux plans tangents avec leurs points de contact; cela fait donc six conditions seulement, et il semble alors que les trois paramètres restants puissent être déterminés de telle sorte qu'un point quelconque de l'espace devienne le centre de la surface du second ordre satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Mais le théorème suivant montre que la question est déterminée, et permet de la résoudre.

THÉORÈME I. — *Le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à deux plans donnés en des points donnés est un plan.*

Soient a et b (*) les deux points, CDP et CDQ les deux

(*) Le lecteur est prie de faire les figures.

plans donnés. Considérons une des surfaces S répondant à la question, et soit O son centre. Le plan O*ab* coupe la surface S suivant une conique tangente en *a* et *b* aux droites *da* et *db*, intersections de ce plan avec les plans tangents P et Q. Le point *d* est alors le pôle de la corde *ab* et, par suite d'un théorème connu, le centre O ne peut être quelconque dans le plan *dab*, mais il doit forcément se trouver sur la droite *dm*, qui passe par le milieu *m* de la corde des contacts *ab*. Il est clair que le centre peut être un point quelconque de cette droite, et, par suite, si l'on fait tourner le plan *dab* autour de *ab*, cette droite *dm* engendrera le lieu des centres cherché. Or cette droite passe par un point fixe *m* et rencontre une droite fixe CD : elle engendre donc un plan.

Remarque. — Lorsqu'on prend pour centre d'une surface du second ordre tangente en *a* et *b* aux plans donnés un point O de ce plan *m*DC, il n'y a que huit conditions entre les paramètres. Donc :

Il est en général impossible de construire une surface du second ordre ayant pour centre un point donné, et tangente à deux plans donnés en des points donnés, mais, lorsque le problème est possible, il admet une infinité de solutions.

Les deux autres parties de la question n'ont pas d'abord l'air d'être mieux déterminées. En effet, si CQP est un troisième plan tangent, ou parallèle à un plan fixe, ou passant par une droite fixe, il semble que l'on pourra toujours déterminer les trois paramètres restants, de telle sorte qu'un point quelconque de ce plan soit le point de contact d'une surface répondant à la question ; mais le théorème connu suivant montre que le problème est déterminé.

Théorème II. — *Le lieu des points de contact d'un* *plan* CPQ *et des surfaces du second degré tangentes à deux plans donnés* DCP, DCQ *en des points donnés b et a est une droite qui passe par le point* C *commun aux trois plans.*

En voici une démonstration, qu'on donne d'ailleurs dans plusieurs classes de Mathématiques spéciales.

Soit CPQ un troisième plan donné. Considérons une quelconque des surfaces S tangentes à ces trois plans, et soit r son point de contact avec CPQ. Le plan abr coupe la surface suivant une conique tangente en a, b, r aux droites dq, dp, pq, intersections de ce plan et du trièdre formé par les trois plans tangents. Mais les points a et b étant donnés, il résulte du théorème de Brianchon que le point r ne peut être quelconque sur pq. Il doit être aussi sur la droite DS; il est donc déterminé. Si maintenant on fait tourner le plan dab autour de ab, comme les plans aCP, bCQ se coupent toujours suivant CS, il en résulte que le point r décrit la droite Cr, intersection de CPQ et CDS.

Remarque I. — Lorsqu'on assujettit une surface du second ordre déjà tangente, en des points a et b, à des plans donnés CDQ, CDP, à être tangente à un troisième plan CPQ, en un point de la droite Cr, il n'y a plus que huit conditions entre les paramètres. Donc:

Il est en général impossible de construire une surface du second degré tangente à trois plans donnés en des points donnés, mais, lorsque le problème est possible, il admet une infinité de solutions.

Remarque II. — La droite Cr ne change pas lorsque les points a et b glissent sur les droites Ca et Cb.

2. Ceci posé, soient CPQ un plan quelconque parallèle au plan fixe, et Cr la droite des points de contact de ce plan : cette droite, restant parallèle à un plan fixe et rencontrant une droite fixe CD, engendrera alors une surface réglée du genre conoïde. Nous allons montrer qu'elle est du second degré, et pour cela qu'elle admet une seconde directrice rectiligne.

Considérons la section menée par ab parallèlement à CP. Le point p s'éloignant à l'infini, les droites dp, ap, qp deviennent parallèles. Les droites pq et dp étant alors deux tangentes parallèles, le milieu I de br est un centre de la section, et se trouve, par suite, sur dm. La droite ar, qui lui est parallèle, a une direction fixe indépendante du plan CPQ. Cette droite ar est donc une seconde directrice rectiligne de la génératrice Cr, qui engendre alors un paraboloïde hyperbolique.

3. Soit PQ la droite par laquelle passent les troisièmes plans tangents : une génératrice quelconque de la surface cherchée admet déjà pour directrices les droites CD et PQ. Nous allons démontrer qu'elle en admet une troisième.

Soit CPQ un plan quelconque mené par PQ, et considérons la section par le plan abP. Il coupe le trièdre CDPQ suivant le triangle dPq, et le point de contact r est sur dS. Si l'on examine alors la figure, on voit que le triangle Srq est tel, que ses côtés passent respectivement par trois points fixes d, b, P, en ligne droite, et que deux de ses sommets décrivent des droites fixes aP, aQ, lorsque le plan CPQ tourne autour de la droite PQ. Donc, par suite d'un théorème connu, le troisième sommet r décrit aussi une droite qui passe en a. Cette droite ar est donc une troisième directrice rectiligne de la génératrice Cr, qui, par suite, engendre un hyperboloïde à une nappe.

Mathématiques élémentaires.

Solution par M. BRILLOUIN,

Élève du lycée Condorcet (classe de M. Desboves) (*).

Par un point donné, dans l'intérieur d'un cercle donné, mener deux cordes qui se coupent sous un angle donné et dont le produit soit maximum ou minimum. On examinera en particulier le cas où le point est extérieur au cercle.

Occupons-nous d'abord du premier cas où l'on suppose le point intérieur au cercle.

Soit (**) a la distance OA du point donné A au centre O, r le rayon de la circonférence, BC, DE les deux cordes, et 2α l'angle aigu qu'elles comprennent. Soit AF la bissectrice de cet angle, et μ l'angle variable que fait cette bissectrice avec OA.

Je remarque d'abord qu'il suffit de faire varier μ de o à π; car, pour deux valeurs de μ égales et de signes contraires, l'ensemble des deux cordes prend deux positions symétriques par rapport au diamètre OA, et, par suite, le produit des cordes est le même.

Cela posé, H et K désignant les milieux des cordes BC et DE, les maxima ou minima de la quantité BC.DE ont lieu en même temps que ceux du quart de son carré, $\overline{BH}^2.\overline{DK}^2$, et l'on a

$$(1)\quad \begin{cases} \overline{BH}^2.\overline{DK}^2 = \left(r^2-\overline{OH}^2\right)\left(r^2-\overline{OK}^2\right), \\ \overline{BH}^2.\overline{DK}^2 = r^4-\left(\overline{OH}^2+\overline{OK}^2\right)r^2+\overline{OK}^2.\overline{OH}^2. \end{cases}$$

Je dis maintenant que, quelle que soit la position des

(*) Premier prix du Concours général.

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

cordes, on a toujours

$$\overline{OH}^2 = a^2 \sin^2(\mu - \alpha)$$

et

$$\overline{OK}^2 = a^2 \sin^2(\mu + \alpha).$$

C'est ce que donnent évidemment les deux triangles HOA, KOA, lorsque les deux sécantes sont du même côté de OA. Si elles sont de part et d'autre de OA, AF restant au-dessus, OK ne change pas; mais on a

$$OH = a \sin(\alpha - \mu) = - a \sin(\mu - \alpha),$$

ce qui donne bien encore

$$\overline{OH}^2 = a^2 \sin^2(\mu - \alpha).$$

On tire de là

$$4\left(\overline{OH}^2 + \overline{OK}^2\right) = 2a^2\left[2\sin^2(\mu + \alpha) + 2\sin^2(\mu - \alpha)\right],$$
$$4\left(\overline{OH}^2 + \overline{OK}^2\right) = 2a^2\left\{2 - \left[\cos(2\mu + 2\alpha) + \cos(2\mu - 2\alpha)\right]\right\},$$
$$4\left(\overline{OH}^2 + \overline{OK}^2\right) = 4a^2(1 - \cos 2\alpha \cos 2\mu).$$

On a aussi

$$\begin{aligned} 4\,\overline{OH}^2 . \overline{OK}^2 &= a^4\left[2\sin(\mu + \alpha)\sin(\mu - \alpha)\right]^2 \\ &= a^4(\cos 2\alpha - \cos 2\mu)^2. \end{aligned}$$

Substituant, dans l'expression (1), ces valeurs de $\overline{OH}^2 + \overline{OK}^2$, et de $\overline{OH}^2 . \overline{OK}^2$, on a, en ordonnant par rapport à $\cos 2\mu$,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} 4\overline{BH}^2 . \overline{DK}^2 = {} & a^4 \cos^2 2\mu - 2a^2 \cos 2\alpha \cos 2\mu\,(a^2 - 2r^2) \\ & + 4r^4 - 4a^2r^2 + a^4 \cos^2 2\alpha. \end{aligned} \right.$$

Remarquons que si l'on fait varier 2μ depuis o jusqu'à $-\pi$, après l'avoir fait varier depuis π jusqu'à o, on retrouvera en ordre inverse les mêmes valeurs du trinôme, $\cos 2\mu$ reprenant lui-même les mêmes valeurs.

Discussion. — Si, au lieu de $\cos 2\mu$, on avait une variable x qui pût prendre toutes les valeurs possibles, le minimum du trinôme aurait lieu pour la valeur

$$x = \frac{a^2 - 2r^2}{a^2} \cos 2\alpha. \tag{3}$$

Mais cette valeur, devant représenter un cosinus, n'est admissible que si son carré est plus petit que l'unité :

$$\left(\frac{a^2 - 2r^2}{a^2}\right)^2 \cos^2 2\alpha < 1,$$

ou

$$\cos^2 2\alpha < \frac{a^4}{(2r^2 - a^2)^2}. \tag{4}$$

Le point étant intérieur au cercle, a est plus petit que r; et, par conséquent, $(2r^2 - a^2)^2$ est plus grand que a^4. La fraction étant plus petite que 1, l'inégalité (4) n'est pas nécessairement satisfaite.

Nous sommes conduits à diviser le cas où le point A est intérieur au cercle en deux autres, suivant que l'inégalité (4) est satisfaite ou non.

$$\textit{Premier cas : } \cos^2 2\alpha < \frac{a^4}{(2r^2 - a^2)^2}.$$

Cette condition étant remplie, si l'on fait croître 2μ entre 0 et π, $\cos 2\mu$ croîtra entre ses deux limites $+1$ et -1, et passera nécessairement par la valeur $\frac{a^2 - 2r^2}{a^2} \cos 2\alpha$, à laquelle correspondra le minimum du trinôme.

D'ailleurs la valeur $\frac{a^2 - 2r^2}{a^2} \cos 2\alpha$ est négative, car

$\frac{a^2 - 2r^2}{a^2}$ est négatif, et l'angle 2α étant l'angle aigu des deux droites, $\cos 2\alpha$ est toujours positif. L'angle μ est donc compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Cela posé, faisons croître $\cos 2\mu$ depuis -1 jusqu'à $\frac{a^2 - 2r^2}{a^2} \cos 2\alpha$. La fonction décroît en tendant vers un minimum. On a donc un premier maximum pour la valeur -1 de $\cos 2\mu$, qui donne

$$2\mu = \pi \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{\pi}{2},$$

et alors la bissectrice de l'angle aigu des deux cordes est perpendiculaire à OA.

Quand $\cos 2\mu$ prend la valeur $\frac{a^2 - 2r^2}{a^2} \cos 2\alpha$, la fonction passe par un minimum, qui correspond à une valeur de μ comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$.

Si $\cos 2\mu$ continue de croître jusqu'à $+1$, la fonction qui vient de passer par un minimum croît aussi. On a donc un deuxième maximum pour la valeur $+1$ de $\cos 2\mu$, c'est-à-dire quand l'angle μ est nul. Dans ce cas, la bissectrice de l'angle aigu des droites se confond avec OA.

Remarque. — Pour les deux maxima, les cordes sont symétriques par rapport à OA.

$$\textit{Second cas} : \cos^2 2\alpha \geqq \frac{a^4}{(2r^2 - a^2)^2}.$$

Si l'égalité a lieu, la valeur du minimum algébrique correspond à $\cos 2\mu = -1$. Si l'inégalité est satisfaite, la valeur du minimum algébrique n'est plus admissible et, comme elle est négative, elle est alors plus petite que

— 1. Donc, dans ces deux cas, lorsqu'on fait croître $\cos 2\mu$ de -1 à $+1$, le trinôme croît en même temps. Le minimum arrive donc pour la valeur -1 de $\cos 2\mu$; c'est-à-dire lorsque μ est droit, et le maximum pour la valeur $+1$ de $\cos 2\mu$, c'est-à-dire lorsque μ est nul.

Supposons maintenant que le point soit extérieur à la circonférence. On peut alors poser ainsi la question :

Un angle donné 2α, aigu ou obtus, tournant autour d'un point A *extérieur au cercle, trouver les maxima et les minima du produit des deux cordes interceptées par le cercle sur les deux côtés de l'angle.*

On voit facilement que les mêmes triangles KOA, HOA donnent toujours, quel que soit l'angle 2α,

$$\overline{OH}^2 = a^2 \sin^2(\mu - \alpha)$$

et

$$\overline{OK}^2 = a^2 \sin^2(\mu + \alpha).$$

On arrive donc à la même expression (2)

$$a^4 \cos^2 2\mu - 2a^2 \cos 2\alpha \cos 2\mu\,(a^2 - 2r^2)$$
$$+ 4r^4 - 4a^2 r^2 + a^4 \cos^2 2\alpha.$$

Si l'on appelle β l'angle de la tangente AG, menée du point A au cercle, avec le diamètre OA, le triangle rectangle GAO donne

$$a = \frac{r}{\sin\beta}.$$

La fonction (2) passe par un minimum pour

$$\cos 2\mu_1 = \frac{a^2 - 2r^2}{a^2} \cos 2\alpha,$$

ou

$$\cos 2\mu_1 = \cos 2\alpha \cos 2\beta. \tag{5}$$

Discussion. — Je dis d'abord que $\cos 2\mu$ ne peut pas prendre la valeur $\cos 2\alpha \cos 2\beta$, bien qu'elle soit plus petite que 1.

En effet, si l'on suppose l'angle 2β aigu, il faut évidemment, pour que le problème soit possible, que l'angle 2α et, par suite aussi, l'angle 2μ soient aigus. Mais comme on a

$$\cos 2\alpha \cos 2\beta < \cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta,$$

ou

$$\cos 2\alpha \cos 2\beta < \cos 2(\beta - \alpha),$$

si l'on prenait $\cos 2\mu$ égal à $\cos 2\alpha \cos 2\beta$, on en conclurait

$$(6) \qquad 2\mu_1 > 2(\beta - \alpha).$$

Or il est évident que, tant que les côtés de l'angle 2α coupent la circonférence, cette inégalité ne peut être satisfaite.

Supposons maintenant l'angle 2β obtus : l'angle 2α pourra être obtus ou aigu.

Si l'angle 2α est obtus, l'égalité (5) montre que $\cos 2\mu_1$ est positif, et $2\mu_1$ aigu. Mais on a toujours

$$(7) \qquad \cos 2\mu_1 > \cos(2\beta - 2\alpha).$$

Il faut donc que l'angle $2(\beta - \alpha)$ soit aigu, et alors de l'inégalité (7) on déduit, comme précédemment, l'inégalité (6), qui est impossible.

Si l'angle 2α est aigu, l'égalité (5) montre que l'angle $2\mu_1$ doit être obtus. Si, en même temps, $2(\beta - \alpha)$ est obtus, l'inégalité (7) conduit encore à l'inégalité (6).

Si, avec 2β obtus et 2α aigu, on a $2(\beta - \alpha)$ aigu, l'inégalité (7) est satisfaite d'elle-même, puisque le premier membre est négatif et le second positif, et il en est de même de l'inégalité (6).

Donc, dans tous les cas, quand on fait croître $\cos 2\mu$ depuis -1 jusqu'à $+1$, ce cosinus passe par la valeur $\cos 2\mu_1$, avant que les deux côtés de l'angle ne coupent la circonférence. Donc, lorsque $\cos 2\mu$ croît depuis $\cos 2(\beta - \alpha)$ jusqu'à $+1$, la fonction croît. Or, pour $2\mu = 2(\beta - \alpha)$, l'un des côtés de l'angle est tangent à la circonférence en G; c'est alors que le produit est un minimum, puisque c'est la première position où les deux côtés de l'angle coupent la circonférence. Et, effectivement, le produit est alors nul. Il atteint son maximum lorsque μ est nul, et les cordes sont alors symétriques par rapport au diamètre OA.

Dans le cas où le point est sur la circonférence, la valeur de $\cos 2\mu$, correspondant au minimum, devient $-\cos 2\alpha$; et commé on a toujours

$$\cos^2 2\alpha < 1,$$

on rentre dans la première partie du premier cas.

En résumé, suivant les cas, le problème peut donner lieu à deux maxima et à un minimum, ou seulement à un minimum et à un maximum.

Philosophie.

SOLUTION PAR M. RAPHAEL HENRIQUE Y DIAZ,
Étudiant à l'Université de Liége.

On inscrit, dans un cercle donné, tous les triangles dont deux côtés sont respectivement parallèles à deux droites fixes données; on demande le lieu des centres des cercles inscrits dans ces triangles.

Soient PQ et SV les directions données (*), et O le cercle donné.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Si, par le centre, nous menons les diamètres HH′, II′ respectivement perpendiculaires à PQ, SV, nous obtiendrons, sur la circonférence, quatre points H, I, H′, I′ tels, que les parallèles correspondantes ne forment point de triangle inscrit; ou plutôt chacun des triangles inscrits est réduit à un point. Par suite, les cercles inscrits à ces triangles se sont également réduits à des points : donc les quatre points H, I, H′, I′ appartiennent au lieu.

Si, maintenant, nous considérons une position A du point mobile prise entre H et I, nous obtiendrons le triangle ABC, dans lequel les côtés AB, AC, étant les cordes parallèles aux directions données, sont respectivement perpendiculaires aux diamètres HH′, II′, qui, par conséquent, partagent en deux parties égales les arcs sous-tendus par ces cordes.

De là résulte que BI est la bissectrice de l'angle B, et CH celle de l'angle C du triangle ABC. Le point m de rencontre de ces deux droites appartient au lieu. Il est, de plus, visible que la bissectrice AF de l'angle BAC est perpendiculaire en P à la corde HI; car les angles FPI et IPA sont égaux comme ayant même mesure.

Cela posé, les triangles AHP, mHP, qui ont le côté HP de l'angle droit commun, et l'angle aigu HAP égal à l'angle aigu HmP, comme ayant même mesure, sont égaux : donc AP $=$ mP; donc le point m du lieu est le symétrique du point A par rapport à HI; donc, quand le point mobile se trouve entre H et I, le lieu se compose d'un arc symétrique de HAI par rapport à la corde HI.

On verrait de même que les trois autres parties du lieu sont les symétriques des arcs IH′, H′I′, I′H par rapport aux cordes qui les sous-tendent.

Menons maintenant les droites IB et CH′. A cause des diamètres HH′, II′, ces droites seront perpendiculaires aux bissectrices BH′, CH. Donc ces droites sont les bissectrices des angles supplémentaires de B et C, et couperont AF en un point K. De plus, il est évident que AF est perpendiculaire en P' à $I'H'$. Les deux triangles rectangles $AP'H'$ et $KP'H'$ ont un côté commun et un angle aigu égal; ils sont donc égaux.

En effet, l'angle aigu $\widehat{I'H'A} = \widehat{I'IA}$, et $\widehat{I'H'C} = \widehat{I'IC}$. Or, par hypothèse, arc IC = arc IA; donc on a

$$\widehat{I'IA} = \widehat{I'IC}, \quad \text{et, par suite,} \quad \widehat{I'H'A} = \widehat{I'H'C}.$$

Donc le point K est symétrique du point A par rapport à la corde $I'H'$; donc le lieu du point K est l'arc symétrique de l'arc $I'HIH'$ par rapport à la corde $I'H'$.

On ferait voir, de la même manière, que le lieu des centres des deux autres cercles exinscrits sont les arcs symétriques des arcs $IHI'H'$ et $HIH'I'$ par rapport aux cordes respectives IH' et $I'H$.

Il serait également facile de s'assurer que les centres des quatre circonférences du lieu sont situés aux quatre sommets d'un losange ayant pour côté le diamètre du cercle O, et dont les diagonales sont égales aux doubles des côtés du rectangle $HI'H'I$.

Troisième.

Solution de la première question par M. BEAUJEUX.

On donne deux circonférences se coupant en D *et* C; *par l'un des points communs, on mène une sécante qui coupe* O *en* B *et* O' *en* B'; *on trace* BO *et* B'O'. *Ces deux droites se coupent en* M; *lieu géométrique.*

Ce lieu est le segment capable de l'angle ODO' constant décrit sur OO' et qui passe par C.

En effet, on peut remarquer que les quatre angles du quadrilatère $ODO'M$ sont réunis au point D. Il y a déjà l'angle ODO'. L'angle DOM extérieur au triangle BOD égale $OBD + BDO = 2BDO$, puisque BOD est isoscèle. L'angle $DO'M$ extérieur au triangle $B'O'D$ égale $O'DB' + DB'O' = 2O'DB'$, puisque $O'DB'$ est isoscèle. Donc l'angle OMO' doit être égal à l'angle constant ODO'; donc, etc.

Solution de la seconde question.

Trouver le plus petit nombre possible qui, divisé par 2, *donne pour reste* 1; *divisé par* 3, *donne pour reste* 2; *divisé par* 4, *donne pour reste* 3, *etc.; et, enfin, divisé par* 10, *donne pour reste* 9.

La question peut être transformée de la manière suivante :

Trouver le plus petit nombre qui, divisé par 2, donne pour reste -1; divisé par 3, donne pour reste -1; divisé par 4, donne pour reste -1, et ainsi de suite jusqu'à 10. Or il est clair que ce nombre est le plus petit commun multiple des nombres 1, 2, 3, jusqu'à 10, diminué de 1, ou

$$5.7.8.9 - 1 = 2519.$$

Ch. B.