Nouvelles annales de mathématiques

G. Bellavitis

Exposition de la méthode des équipollences

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 189-198

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__189_1>

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 138);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

---

169. PROBLÈME. — *Déterminer l'ordre du contact de deux courbes, et trouver le cercle osculateur d'une courbe donnée.* — Supposons que les deux courbes soient exprimées par

$$\mathrm{OM} \triangleq \mathrm{F}(t), \quad \mathrm{ON} \triangleq f(u),$$

et que u soit une fonction indéterminée de t, laquelle reçoit une valeur particulière qui donne $\mathrm{OM} \triangleq \mathrm{ON}$, c'est-à-dire que M soit le point commun aux deux courbes. Attribuons à t l'accroissement infiniment petit ω, et déterminons la fonction u de manière que la droite

$$\mathrm{M'N'} \bumpeq \mathrm{ON'} - \mathrm{OM'} \bumpeq \omega^{n+1}\mathrm{OP}$$

soit la plus petite possible, OP étant une droite finie. Le nombre n sera l'ordre du contact.

Pour les points non singuliers, c'est-à-dire généralement, n est un nombre entier, parce qu'à l'accroissement ω correspondent

$$\mathrm{OM'} \bumpeq \mathrm{OM} + \omega\mathfrak{D}\mathrm{M} + \frac{\omega^2}{2}\mathfrak{D}^2\mathrm{M} + \ldots,$$

$$\mathrm{ON'} \bumpeq \mathrm{ON} + \ldots,$$

$$\mathrm{M'N'} \bumpeq \omega(\mathfrak{D}\mathrm{N} - \mathfrak{D}\mathrm{M}) + \frac{\omega^2}{2}(\mathfrak{D}^2\mathrm{N} - \mathfrak{D}^2\mathrm{M}) + \ldots.$$

Ainsi le contact est au moins du second ordre, lorsqu'on peut satisfaire aux trois équipollences

$$\mathrm{OM} \bumpeq \mathrm{ON}, \quad \mathfrak{D}\mathrm{M} \bumpeq \mathfrak{D}\mathrm{N}, \quad \mathfrak{D}^2\mathrm{M} \bumpeq \mathfrak{D}^2\mathrm{N}.$$

170. Prenons pour exemple la parabole

$$\mathrm{OM} \bumpeq t^2 + t\surd,$$

et la circonférence

$$\mathrm{ON} \bumpeq \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\surd + (1 - \surd)(1 - \varepsilon^u ,$$

qui ont un point commun correspondant à

$$t = \tfrac{1}{2}, \quad u = 0.$$

La relation

$$\mathfrak{D}\mathrm{M} \bumpeq \mathfrak{D}\mathrm{N}$$

donne l'équipollence

$$2t + \surd \bumpeq -(\surd + 1)\varepsilon^u\mathfrak{D}u,$$

qui est satisfaite par

$$\mathfrak{D}u = -1.$$

De même, la relation

$$\textcircled{D}^2 M \,\underline{\frown}\, \textcircled{D}^2 N,$$

ou

$$2 \,\underline{\frown}\, -(\surd + 1)(\textcircled{D}^2 u + \surd \textcircled{D} u^2)\,\varepsilon^u,$$

est satisfaite par

$$\textcircled{D}^2 u = -1.$$

Mais on ne pourrait pas ensuite avoir

$$\textcircled{D}^3 M \,\underline{\frown}\, \textcircled{D}^3 N,$$

quelle que fût la valeur réelle de $\textcircled{D}^3 u$. Donc le contact entre la parabole et le cercle est du second ordre.

171. Si l'on avait à comparer deux mouvements au lieu de deux courbes, u serait donné en fonction de t, et, par suite, l'*osculation* des deux mouvements pourrait être moindre que celle des courbes. Ainsi le mouvement parabolique des corps pesants, exprimé par

$$OM \,\underline{\frown}\, t^2 + tP\surd,$$

et le mouvement circulaire uniforme, exprimé par

$$ON \,\underline{\frown}\, \tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{2}\surd + (\surd - 1)\,\varepsilon^{\frac{1}{2}-t},$$

donnent, pour $t = \frac{1}{2} + \omega$,

$$M'N' \,\underline{\frown}\, -(1 + \surd)\,\frac{\omega^2}{2}.$$

Par suite, l'osculation des deux mouvements est seulement du premier ordre.

172. Au moyen des principes établis déjà, il sera facile de déterminer le cercle osculateur à une courbe donnée en l'un de ses points M. Si R en est le centre, la circonférence de ce cercle est exprimée par l'équipollence

$$ON \,\underline{\frown}\, OR + \varepsilon^u RM.$$

Pour prendre les dérivées, il faut considérer OR, RM comme constantes, ce qui donne

$$\mathfrak{D}\mathrm{N} \bumpeq \surd\, \varepsilon^{u}\, \mathfrak{D}u\, \mathrm{RM},$$
$$\mathfrak{D}^{2}\mathrm{N} \bumpeq (\surd\, \mathfrak{D}^{2}u - \mathfrak{D}u^{2})\, \varepsilon^{u}\, \mathrm{RM},$$

expressions dans lesquelles on devra faire $u = 0$, cette valeur étant celle qui fait coïncider N avec M.

Pour que le contact soit du second ordre, on devra avoir

$$\mathfrak{D}\mathrm{M} \bumpeq \surd\, \mathfrak{D}u\, \mathrm{RM},$$
$$\mathfrak{D}^{2}\mathrm{M} \bumpeq (\surd\, \mathfrak{D}^{2}u - \mathfrak{D}u^{2})\, \mathrm{RM}.$$

Les divisant l'une par l'autre, la relation du n° 164 nous donne

$$l + \lambda\surd \bumpeq \frac{\mathfrak{D}^{2}u}{\mathfrak{D}u} + \surd\, \mathfrak{D}u,$$

en sorte que

$$\lambda = \mathfrak{D}u,$$

et la relation

$$\mathfrak{D}\mathrm{M} \bumpeq \surd\, \mathfrak{D}u\, \mathrm{RM}$$

est identique avec la relation (2) du n° 63.

173. L'enveloppe de toutes les droites MS, qui forment avec les tangentes

$$\mathrm{MT} \bumpeq \mathfrak{D}\mathrm{M}$$

l'angle constant α, se trouve résulter du n° 163 en posant

$$\mathrm{MS} \bumpeq p\, \varepsilon^{u}\, \mathfrak{D}\mathrm{M},$$

puis en déterminant p de manière que $\mathfrak{D}\mathrm{S}$ soit parallèle à cette même droite MS. On trouve ainsi

$$\mathrm{MS} \bumpeq \sin\alpha\, \frac{\varepsilon^{\alpha}}{\surd}\, \mathrm{MR}, \tag{9}$$

relation connue entre les points S d'une développée imparfaite, et les points R de la développée proprement dite.

174. Problème. — *Déterminer la courbe* P *parallèle à une courbe donnée* M, *c'est-à-dire ayant avec elle toutes les normales* MP *communes*. — Le point P appartenant à la normale de la courbe donnée au point M, on aura

$$\mathrm{OP} \simeq \mathrm{OM} + p\sqrt{}\,\mathrm{dM}.$$

En outre, la tangente en P, qui est déterminée en direction par

$$\mathrm{dP} \simeq \mathrm{dM} + p\sqrt{}\,\mathrm{d^2M} + \sqrt{}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{dM},$$

doit être parallèle à la tangente dM. Multipliant par cj.dM, nous aurons

$$p\sqrt{}\,\mathrm{cj.dM\,d^2M} + \sqrt{}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{dM\,cj.dM}$$

parallèle à dMcj.dM, c'est-à-dire d'inclinaison nulle, et, par conséquent, équipollente à sa propre conjuguée

$$-p\sqrt{}\,\mathrm{dM\,cj.d^2M} - \sqrt{}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{dM\,cj.dM}.$$

Il en résulte

$$-2\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d^2M}}{\mathrm{dM}} + \mathrm{cj.}\frac{\mathrm{d^2M}}{\mathrm{dM}},$$

et, revenant aux fonctions primitives,

$$p = c : \sqrt{\mathrm{dM\,cj.dM}}.$$

Donc la distance des deux courbes est

$$\mathrm{MP} \simeq c\sqrt{}\,\sqrt{\mathrm{dM} : \mathrm{cj.dM}}, \tag{10}$$

c'est-à-dire de grandeur constante, et les deux courbes sont vraiment parallèles. Avec les formules du n° 164, on a

$$p = ce^{-\int l\,dt}.$$

175. Ces calculs seraient devenus plus rapides en posant [168, (7)]

$$dM \bumpeq \varepsilon^{\varphi} ds.$$

Supposons plus généralement que la droite MP forme avec la tangente un angle constant α, on aura

$$OP \bumpeq OM + p\varepsilon^{\alpha+\varphi}\mathrm{D}s,$$

et si la tangente

$$\mathrm{D}P \bumpeq \varepsilon^{\varphi}\mathrm{D}s + p\varepsilon^{\alpha+\varphi}(\mathrm{D}^2 s + \surd\mathrm{D}s\mathrm{D}\varphi) + \varepsilon^{\alpha+\varphi}\mathrm{D}p\mathrm{D}s$$

doit être parallèle à $\mathrm{D}M$, on aura aussi

$$\begin{aligned} &p\varepsilon^{\alpha}(\mathrm{D}^2 s + \surd\mathrm{D}s\mathrm{D}\varphi) + \varepsilon^{\alpha}\mathrm{D}p\mathrm{D}s \\ &\qquad = p\varepsilon^{-\alpha}(\mathrm{D}^2 s - \surd\mathrm{D}s\mathrm{D}\varphi) + \varepsilon^{-\alpha}\mathrm{D}p\mathrm{D}s. \end{aligned}$$

En remontant aux fonctions primitives, on a

$$p\mathrm{D}s = ca^{-\varphi},$$

c étant la constante arbitraire, et a étant égal à $e^{\cot\alpha}$; par suite

(11) $$MP \bumpeq ca^{-\varphi}\varepsilon^{\alpha+\varphi}.$$

Donc toutes les droites MP, qui sont coupées sous un angle égal et constant par les deux courbes M, P, sont respectivement équipollentes aux rayons vecteurs d'une spirale logarithmique (166) qui coupe ces rayons sous le même angle.

176. Problème. — *Déterminer les développées d'une courbe donnée* M, *c'est-à-dire les trajectoires orthogonales de ses tangentes* MT. — Appelons T le point de la trajectoire cherchée, et posons

$$OT \bumpeq OM + q\mathrm{D}M.$$

La tangente à la courbe T est donnée par

$$\mathrm{D}T \bumpeq (1 + \mathrm{D}q)\mathrm{D}M + q\mathrm{D}^2 M$$

et doit être perpendiculaire à $\mathfrak{D}$M; on aura par suite, selon la supposition habituelle,

$$(4)\qquad \mathfrak{D}^2\mathrm{M} : \mathfrak{D}\mathrm{M} \triangleq l + \lambda\sqrt{},$$
$$1 + \mathfrak{D}q + ql = 0,$$

et de là

$$(12)\qquad \mathrm{MT} \triangleq -\, e^{-\int l\,dt} \int e^{\int l\,dt}\, dt\, \mathfrak{D}\mathrm{M} \quad (^*).$$

177. Les calculs sont plus rapides si l'équipollence de la courbe M est donnée sous la forme (7); alors, posant

$$\mathrm{MT} \triangleq q\,\varepsilon^{\varphi},$$

on aura

$$\mathfrak{D}\mathrm{T} \triangleq \varepsilon^{\varphi}\,(\mathfrak{D}s + \mathfrak{D}q) + q\sqrt{}\,\varepsilon^{\varphi}\,\mathfrak{D}\varphi,$$

et cette droite devra être perpendiculaire à ε^{φ}, c'est-à-dire que

$$\mathfrak{D}s + \mathfrak{D}q = 0.$$

Revenant aux fonctions primitives, on a

$$q = c - s,$$

et de là

$$(13)\qquad \mathrm{MT} \triangleq (c - s)\,\varepsilon^{\varphi}.$$

Il nous sera facile de démontrer que la développante T a pour développée la courbe M. Nous avons en effet

$$\mathfrak{D}\mathrm{T} \triangleq (c - s)\sqrt{}\,\varepsilon^{\varphi}\,\mathfrak{D}\varphi$$

et (supposant pour abréger $\mathfrak{D}\varphi$ constant)

$$\mathfrak{D}^2\mathrm{T} \triangleq (s - c)\,\varepsilon^{\varphi}\,\mathfrak{D}\varphi^2 - \sqrt{}\,\varepsilon^{\varphi}\,\mathfrak{D}\varphi\,\mathfrak{D}s\,;$$

par suite, la relation (4) (164) donne, par rapport à la courbe T,

$$\lambda = \mathfrak{D}\varphi,$$

(*) Ce résultat suppose l'intégration de l'équation différentielle $1 + \mathfrak{D}q + ql = 0$, qu'on laisse au lecteur le soin d'effectuer.

(*Note du Traducteur.*)

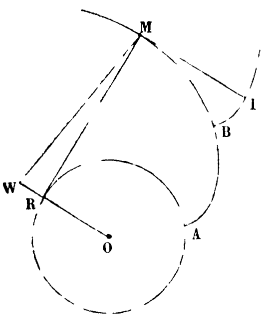
et le rayon de courbure en T est

$$\frac{1}{\lambda}\sqrt{\ }\,\mathfrak{D}\mathrm{T} \triangleq (s-c)\,\varepsilon^{\varphi} \triangleq \mathrm{TM}.$$

178. Appliquons les formules précédentes à la développante du cercle de rayon 1

$$\mathrm{OR} \triangleq \varepsilon^{\varphi} \quad (fig.\ 35).$$

Fig. 35.



La dérivée de son arc est

$$\mathfrak{D}s = \mathfrak{D}\varphi,$$

c'est-à-dire qu'on peut donner à l'équipollence la forme

$$\mathrm{OR} \triangleq \sqrt{\ }\int \varepsilon^{\varphi}\,d\varphi.$$

Par suite, la développante du cercle est exprimée par

$$\mathrm{OM} \triangleq (1-\varphi\sqrt{\ })\,\varepsilon^{\varphi}.$$

Pour trouver la seconde développante BT, donnons à l'équipollence de la première développante AM la forme

$$\mathrm{OM} \triangleq \int \varepsilon^{\varphi}\,\varphi\,d\varphi.$$

Nous aurons ainsi

$$\mathfrak{D}s \triangleq \varphi\,\mathfrak{D}\varphi \quad \text{et} \quad \mathrm{MT} \triangleq \left(c-\tfrac{1}{2}\varphi^{2}\right)\varepsilon^{\varphi}.$$

De là

$$\mathrm{OT} \bumpeq (1 + c - \varphi\sqrt{} + \tfrac{1}{2}\varphi^2)\, \varepsilon^{\varphi} \bumpeq \sqrt{}\int \varepsilon^{\varphi}(c - \tfrac{1}{2}\varphi^2)\, d\varphi.$$

Le rayon de courbure BT en T est $c - \frac{1}{2}\varphi^2$; celui de sa développée M est φ, et celui de R est égal à 1.

179. *Déterminer la direction de la droite* MW *qui, partant d'un point* M *d'une courbe, divise en deux parties égales la corde infiniment voisine parallèle à la tangente en* M; *trouver de plus la parabole ayant avec la courbe un contact du troisième ordre.* Ce problème est le dernier de la *Géométrie de position*. Je l'ai résolu n° 25 de mon *Essai* (1835), avant les solutions données par M. Transon (1841) et par Dupin (1848).

Si N, L sont les deux points de la courbe qui correspondent à $t + \omega$ et à $t - \psi$, on a

$$\mathrm{ON} \bumpeq \mathrm{OM} + \omega\,\mathfrak{D}\mathrm{M} + \frac{\omega^2}{2}\mathfrak{D}^2\mathrm{M} + \ldots,$$

$$\mathrm{OL} \bumpeq \mathrm{OM} - \psi\,\mathfrak{D}\mathrm{M} + \ldots,$$

$$\mathrm{LN} \bumpeq (\omega + \psi)\,\mathfrak{D}\mathrm{M} + \tfrac{1}{2}(\omega^2 - \psi^2)\,\mathfrak{D}^2\mathrm{M} + \tfrac{1}{6}(\omega^3 + \psi^3)\,\mathfrak{D}^3\mathrm{M} + \ldots,$$

et, pour que cette droite soit parallèle à la tangente $\mathfrak{D}\mathrm{M}$, il faudra que l'expression

$$3(\omega - \psi)\,\mathfrak{D}^2\mathrm{M} + (\omega^2 - \omega\psi + \psi^2)\,\mathfrak{D}^3\mathrm{M}$$

le soit également; cette expression, multipliée par la quantité réelle $\frac{1}{6}(\omega + \psi)$ et composée avec $(\omega + \psi)\,\mathfrak{D}\mathrm{M}$, donnera la droite LN (*).

ω, ψ devant être infiniment petits, il faudra que $\omega - \psi$ soit un infiniment petit du second ordre, comme

(*) On néglige évidemment ici les infiniment petits d'ordre supérieur, ce qui est du reste parfaitement licite.

(*Note du Traducteur*.)

l'est $\omega^2 - \omega\psi + \psi^2$. Posant

$$\omega - \psi = q\omega^2,$$

nous devrons déterminer la quantité réelle q, de manière que l'on ait

$$(14) \qquad 3q\,\mathcal{D}^2\mathrm{M} + \mathcal{D}^3\mathrm{M} \bumpeq r\,\mathcal{D}\mathrm{M},$$

r étant aussi réel ; d'après quoi la direction de la droite, qui joint le point M au milieu de LN, sera donnée par l'équipollence

$$\mathrm{MN} + \mathrm{ML} \bumpeq (\omega - \psi)\,\mathcal{D}\mathrm{M} + \tfrac{1}{2}(\omega^2 + \psi^2)\,\mathcal{D}^2\mathrm{M},$$

ou

$$(15) \qquad \mathrm{MW} \bumpeq q\,\mathcal{D}\mathrm{M} + \mathcal{D}^2\mathrm{M}.$$

(*A suivre.*)