NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DÉSIRÉ ANDRÉ

Sur une formule d'arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 185-189

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__185_1>

SUR UNE FORMULE D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

1. *Combien de fois le nombre premier p entre-t-il comme facteur dans le produit des n premiers nombres?*

C'est là une question bien connue, et dont on expose la solution dans plusieurs traités d'Algèbre. Seulement, dans ces traités, on se borne à indiquer comment on trouve le nombre demandé, sans donner explicitement la formule qui le représente. Cette lacune, regrettable selon nous, l'objet de cette Note est de la combler.

2. La méthode indiquée d'ordinaire pour calculer le nombre demandé est celle-ci :

Prendre la partie entière du quotient de n par p, la partie entière du quotient du nombre obtenu par p, la partie entière du quotient du nouveau nombre obtenu par p encore, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne une partie entière inférieure à p; puis, enfin, faire la somme de toutes ces parties entières.

Cette méthode conduit immédiatement à la formule omise; car, si nous désignons par

$$\left(\frac{a}{b}\right)$$

la partie entière du quotient de a par b, les parties entières dont on vient de parler et dont on doit faire la somme sont représentées respectivement par les expressions

$$\left(\frac{n}{p}\right),\quad \left(\frac{n}{p^2}\right),\quad \left(\frac{n}{p^3}\right),\quad \left(\frac{n}{p^4}\right),\ldots,$$

de telle sorte que, si l'on désigne par x le nombre cherché, on a

$$x = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{n}{p^k}\right).$$

3. Cette formule n'est donc que la traduction immédiate de la méthode indiquée. On peut aussi l'établir directement; voici, pour cela, comme nous raisonnerons.

Parmi les facteurs 1, 2, 3,..., n, le nombre de ceux qui sont multiples de p est

$$\left(\frac{n}{p}\right),$$

le nombre de ceux qui sont multiples de p^2 est

$$\left(\frac{n}{p^2}\right),$$

le nombre de ceux qui sont multiples de p^3 est

$$\left(\frac{n}{p^3}\right),$$

et ainsi de suite.

Considérons maintenant la somme

$$\left(\frac{n}{p}\right)+\left(\frac{n}{p^2}\right)+\left(\frac{n}{p^3}\right)+\ldots;$$

elle est exactement égale à x. En effet, soit p^k une puissance de p qui entre dans l'un des facteurs 1, 2, 3,..., n; elle est bien comptée k fois dans cette formule, car elle entre pour une unité dans

$$\left(\frac{n}{p}\right),$$

pour une unité dans

$$\left(\frac{n}{p^2}\right),$$

pour une unité dans

$$\left(\frac{n}{p^3}\right),$$

et ainsi de suite.

On a donc

$$x=\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{n}{p^k}\right).$$

4. On voit combien cette formule est facile à établir; elle a été probablement plusieurs fois établie : aussi, bien que, à notre connaissance, elle ne soit imprimée nulle part, l'avons-nous toujours regardée et citée comme une formule bien connue. Elle est d'ailleurs, sêlon nous, fort importante. Nous nous en sommes servi maintes fois, notamment pour la démonstration de certains théorèmes sur les nombres (*), sur les combinaisons (**), sur les factorielles (***). Afin de montrer combien elle est d'un emploi commode, nous allons en faire une application à une question bien simple du cours de Mathématiques spéciales.

5. *Application.* — Soit ce théorème :

Le produit de n nombres entiers consécutifs est toujours divisible par le produit des n premiers nombres.

Pour le démontrer, il suffit de prouver qu'un nombre premier quelconque entre comme facteur dans le premier produit autant de fois, au moins, que dans le second.

Soit

$$(t+1)(t+2)(t+3)\ldots(t+n)$$

le premier produit. Il est évidemment égal au produit des $t+n$ premiers nombres, divisé par le produit des t premiers nombres; par suite, le facteur premier p y entre un nombre de fois marqué par la différence

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{t+n}{p^k}\right)-\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{t}{p^k}\right).$$

Dans le second produit, ce même facteur p entre un

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2e série, t. XI, p. 314.
(**) *Idem*, 2e série, t. XII, p. 84.
(***) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, p. 84.

nombre de fois égal à

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{n}{p^k}\right).$$

Donc il suffit de prouver qu'on a

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{t+n}{p^k}\right)-\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{t}{p^k}\right)\geqq\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{n}{p^k}\right),$$

ou, *a fortiori*,

$$\left(\frac{t+n}{p^k}\right)-\left(\frac{t}{p^k}\right)\geqq\left(\frac{n}{p^k}\right),$$

ce qui revient à

$$\left(\frac{t+n}{p^k}\right)\geqq\left(\frac{t}{p^k}\right)+\left(\frac{n}{p^k}\right).$$

Or cette dernière relation est évidemment satisfaite; donc le théorème est démontré.