A. PICART

Série de Taylor

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 15-18
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__15_1>

SÉRIE DE TAYLOR;

PAR M. A. PICART,
Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

Si l'on considère $m+1$ valeurs $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m$ de la fonction $y=f(x)$, correspondant aux valeurs x_0. x_0+h, $x_0+2h, \ldots, x_0+mh$ de la variable, on a

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} y_m = y_0 + C_1^m \Delta y_0 + C_2^m \Delta^2 y_0 + \ldots + C_n^m \Delta^n y_0 \\ + C_{n+1}^m \Delta^{n+1} y_0 + \ldots + C_{m-1}^m \Delta^{m-1} y_0 + \Delta^m y_0, \end{aligned} \right.$$

C_p^m représentant le nombre de combinaisons de m objets p à p.

Désignons par R_n l'ensemble des termes qui suivent le $n+1^{ième}$, c'est-à-dire posons

$$R_n = C^m_{n+1}\,\Delta^{n+1}y_0 + C^m_{n+2}\,\Delta^{n+2}y_0 + \ldots + C^m_{m-1}\,\Delta^{m-1}y_0 + \Delta^m y_0,$$

et exprimons cette quantité au moyen seulement des différences $n+1^{ièmes}$.

On a

$$\Delta^{n+1}y_0 = \Delta^{n+1}y_0,$$
$$\Delta^{n+2}y_0 = \Delta^{n+1}y_1 - \Delta^{n+1}y_0,$$
$$\Delta^{n+3}y_0 = \Delta^{n+1}y_2 - 2\Delta^{n+1}y_1 + \Delta^{n+1}y_0,$$
$$\Delta^{n+4}y_0 = \Delta^{n+1}y_3 - 3\Delta^{n+1}y_2 + 3\Delta^{n+1}y_1 - \Delta^{n+1}y_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta^{n+p+1}y_0 = \Delta^{n+1}y_p - C^p_1\,\Delta^{n+1}y_{p-1} + C^p_2\,\Delta^{n+1}y_{p-2} - C^p_3\,\Delta^{n+1}y_{p-3} + \ldots \pm \Delta^{n+1}y_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta^m y_0 = \Delta^{n+1}y_{m-n-1} - C^{m-n-1}_1\,\Delta^{n+1}y_{m-n-2} + C^{m-n-1}_2\,\Delta^{n+1}y_{m-n-3} - \ldots \pm \Delta^{n+1}y_0.$$

En multipliant respectivement ces égalités par C^m_{n+1}, C^m_{n+2}, $C^m_{n+3}, \ldots, C^m_m$ et ajoutant, on obtient

$$\begin{aligned}
R_n = {} & \Delta^{n+1}y_0\left(C^m_{n+1} - C^m_{n+2} + C^m_{n+3} - \ldots \pm C^m_m\right) \\
& + \Delta^{n+1}y_1\left(C^m_{n+2} - 2C^m_{n+3} + 3C^m_{n+4} - 4C^m_{n+5} + \ldots \pm \overline{m-n-1}\,C^m_m\right) \\
& + \Delta^{n+1}y_2\left(C^m_{n+3} - C^3_1 C^m_{n+4} + C^4_2 C^m_{n+5} - C^5_3 C^m_{n+6} + \ldots\right) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \Delta^{n+1}y_p\left(C^m_{n+p+1} - C^{p+1}_1 C^m_{n+p+2} + C^{p+2}_2 C^m_{n+p+3} + \ldots\right) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - \Delta^{n+1}y_{m-n-1}\,C^m_m.
\end{aligned}$$

Mais on a, par la formule du binôme,

$$(1+x)^m = C_m^m + C_{m-1}^m x + C_{m-2}^m x^2 + \ldots + C_{m-n}^m x^n + \ldots,$$

$$(1+x)^{-(p+1)} = 1 - C_1^{p+1} x + C_2^{p+2} x^2 - C_3^{p+3} x^3 + \ldots$$

Si l'on multiplie ces deux séries, on aura, pour le coefficient de x^n,

$$C_{m-n}^m - C_1^{p+1} C_{m-n+1}^m + C_2^{p+2} C_{m-n+2}^m - C_3^{p+3} C_{m-n+3}^m + \ldots;$$

d'ailleurs, le produit étant $(1+x)^{m-p-1}$, le coefficient de x^n est $C_{m-n-p-1}^{m-p-1}$; donc on a la formule

$$C_{m-n-p-1}^{m-p-1} = C_{m-n}^m - C_1^{p+1} C_{m-n+1}^m + C_2^{p+2} C_{m-n+2}^m - \ldots$$

Si l'on y fait $m - n = n + p + 1$, elle devient

$$C_n^{m-p-1} = C_{n+p+1}^m - C_1^{p+1} C_{n+p+2}^m + C_2^{p+2} C_{n+p+3}^m - \ldots,$$

donc le reste R_n peut s'écrire

$$R_n = C_n^{m-1} \Delta^{n+1} y_0 + C_n^{m-2} \Delta^{n+1} y_1 + C_n^{m-3} \Delta^{n+1} y_2 + \ldots$$
$$+ C_n^n \Delta^{n+1} y_{m-n-1},$$

ou

$$R_n = (C_n^{m-1} + C_n^{m-2} + \ldots) \frac{C_n^{m-1} \Delta^{n+1} y_0 + C_n^{m-2} \Delta^{n+1} y_1 + \ldots}{C_n^{m-1} + C_n^{m-2} + \ldots},$$

ou, d'après une formule connue,

$$R_n = C_{n+1}^m \frac{C_n^{m-1} \Delta^{n+1} y_0 + C_n^{m-2} \Delta^{n+1} y_1 + \ldots}{C_n^{m-1} + C_n^{m-2} + \ldots}.$$

ou

$$R_n = C_{n+1}^m \, M,$$

M désignant une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite des différences $(n+1)^{\text{ièmes}}$: $\Delta^{n+1}y_0$, $\Delta^{n+1}y_1$, $\Delta^{n+1}y_2, \ldots, \Delta^{n+1}y_{m-n-1}$. Posons maintenant $m\Delta x = h$, et remplaçons, dans l'équation (1), m par $\frac{h}{\Delta x}$. cette équation devient

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1.2}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \ldots$$
$$+ \frac{h(h-\Delta x)\ldots(h-\overline{n-1}\,\Delta x)}{1.2\ldots n}\frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n}$$
$$+ \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)\ldots(h-n\Delta x)}{1.2\ldots(n+1)}\frac{\mathrm{M}}{\Delta x^{n+1}}.$$

Si nous faisons tendre Δx vers zéro, nous obtiendrons

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{1.2}f''(x_0) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(x_0) + \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\mathrm{M}_1,$$

M_1 étant une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs que prend $f^{n+1}(x)$, lorsque x varie de x_0 à x_0+h. Si la fonction $f^{n+1}(x)$ est continue de x_0 à x_0+h, M_1 est la valeur que prend cette fonction pour une certaine valeur $x_0+\theta h$, comprise entre x_0 et x_0+h, et alors on a la série de Taylor avec la forme du reste donnée par Lagrange.

Je dois dire que la méthode que je propose ici n'est autre qu'une méthode déjà ancienne donnée par M. Caqué, mais présentée sous un autre point de vue qui la rend peut-être plus intuitive, plus directe et plus simple.