Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 154-159

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__154_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1064

(voir 2e série, t. XI, p. 96);

PAR M. C. MOREAU.

On a une courbe fermée, plane et convexe. Si $d\sigma$ désigne un élément superficiel infiniment petit extérieur à la courbe, θ l'angle sous lequel on voit la courbe de cet élément, et t, t' les longueurs des tangentes à la courbe, issues de l'élément, la somme de toutes les quantités $\dfrac{d\sigma \sin\theta}{tt'}$, se rapportant à tous les éléments $d\sigma$ du plan extérieurs à la courbe, est égale à $2\pi^2$.

(F. DIDON.)

Soient C une courbe fermée, plane et convexe, AB, A'B' deux tangentes qui se coupent au point M sous l'angle θ et qui font respectivement des angles ω et ω' avec un axe fixe quelconque XY situé dans le plan; je mène les deux tangentes infiniment voisines déterminant le quadrilatère élémentaire Mabc que je prends pour valeur de $d\sigma$. Cela posé, $d\omega$ et $d\omega'$ étant supposés tous les deux du premier ordre, on aura, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$d\sigma = \mathrm{M}abc = \mathrm{M}a.\mathrm{M}b\sin\theta,$$

$$\mathrm{M}a = \frac{t'\,d\omega'}{\sin\theta}, \quad \mathrm{M}b = \frac{t\,d\omega}{\sin\theta},$$

et, par suite,

$$\frac{d\sigma\sin\theta}{tt'} = d\omega\,d\omega'.$$

Si maintenant on fait la somme de toutes les quantités telles que $d\omega.d\omega'$, en faisant varier successivement ω et ω' de ω à $2\pi + \omega$ et de ω' à $2\pi + \omega'$, il est clair que chaque élément plan, tel que Mabc, aura été pris deux fois, et que, par suite, la somme cherchée sera

$$\sum \frac{d\sigma\sin\theta}{tt'} = \frac{1}{2}\int_{\omega}^{\omega+2\pi}\int_{\omega'}^{\omega'+2\pi} d\omega\,d\omega' = 2\pi^2.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Brocard.

Question 1066

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 143);

PAR M. C. MOREAU.

Quelque valeur entière et positive que l'on donne à a et à m, on a

$$a^{2m+3} < \frac{a(a+1)(2a+1)(3a^2+3a+1)^m}{2.3^m} < (a+1)^{2m+3}.$$

(S. REALIS.)

Chassons le dénominateur 2.3^m, les inégalités à démontrer deviennent

$$2a^3(3a^2)^m < (2a^3+3a^2+a)(3a^2+3a+1)^m$$
$$< (2a^3+6a^2+6a+2)(3a^2+6a+3)^m,$$

et, sous cette forme, elles sont évidentes.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Gambey, Kruschwitz et Droiteau, élève du lycée de Moulins.

Question 1076

(voir 2e série, t. XI, p. 144);

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donnés une droite et un point, on mène par le point deux cercles tangents à la droite et se coupant sous un angle donné, puis la seconde tangente commune à ces deux cercles. Le lieu du point symétrique du point donné par rapport à cette tangente est un limaçon de Pascal, qui a pour l'un de ses foyers le point donné; l'autre foyer est le point symétrique du point donné, par rapport à la droite donnée.

(H. FAURE.)

Soient O et DD′ le point et la droite donnés, d leur distance et 2α l'angle constant formé par les rayons menés du point O aux centres de deux circonférences conjuguées.

Je prends le point O pour pôle et la perpendiculaire menée de ce point à DD′, mais prolongée en sens contraire, pour axe polaire.

Les centres des cercles sont situés sur une parabole ayant le point O pour foyer et la droite DD′ pour directrice; la droite qui joint les centres de deux cercles conjugués est vue du foyer O sous un angle constant 2α : elle enveloppe donc une ellipse ayant le point O pour foyer (PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures*, n° 480). On aura les extrémités du grand axe en cherchant les points où l'axe polaire est rencontré par la ligne des centres quand elle est parallèle à la droite DD′, c'est-à-dire quand les circonférences conjuguées ont même rayon.

On a alors

$$r_1 = d + r_1 \cos\alpha,$$

$$r_2 = d - r_2 \cos\alpha,$$

d'où

$$r_1 \cos\alpha = \frac{d\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = a + c,$$

$$r_2 \cos\alpha = \frac{d\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = a - c,$$

$$a = \frac{d\cos\alpha}{\sin^2\alpha}, \quad c = \frac{d\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha},$$

$2a$ et $2c$ désignant respectivement le grand axe et la distance des foyers.

Le lieu des symétriques du point O, par rapport à toutes les tangentes à l'ellipse, c'est-à-dire le lieu des seconds points d'intersection des circonférences conjuguées, est le cercle directeur décrit du second foyer. Si l'on nomme r et θ les coordonnées polaires d'un point du lieu cherché, la corde commune des deux circonférences conjuguées correspondantes fait, avec l'axe polaire, l'angle $\frac{\theta}{2}$, et, en appelant δ sa longueur, on a

$$4a^2 = 4c^2 + \delta^2 - 4c\delta\cos\frac{\theta}{2},$$

d'où

$$\delta = 2c\cos\frac{\theta}{2} \pm 2\sqrt{a^2 - c^2\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

La distance du point O à la seconde tangente commune est égale, par raison de symétrie, à la distance du second point d'intersection des deux circonférences à la droite DD', c'est-à-dire à

$$\delta\cos\frac{\theta}{2} + d.$$

Le rayon vecteur r est le double de cette distance; donc l'équation du lieu cherché est

$$r = 4c\cos^2\frac{\theta}{2} \pm 4\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{a^2 - c^2\sin^2\frac{\theta}{2}} + 2d,$$

équation qui devient, en faisant disparaître le radical et ayant égard aux valeurs de a et de c,

$$(1) \qquad r^2 - 4cr\cos\theta - 4(c+d)r + 4d^2 = 0.$$

Si l'on transporte le pôle au point O′, symétrique du point O par rapport à la droite DD′, on obtient l'équation

$$(2) \qquad r = 4(c+d)\cos\theta \pm 4\sqrt{c(c+d)},$$

ou

$$r = \frac{4d}{\sin^2\alpha}\cos\theta \pm \frac{4d\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

qui représente bien un limaçon de Pascal, ayant pour pôle la nouvelle origine (*).

Il est clair que le lieu des projections du point O sur les tangentes communes serait un autre limaçon de Pascal, ayant pour foyer la projection du point O sur DD′.

Note du Rédacteur. — Pour résoudre cette question par la Géométrie élémentaire, je nommerai C, C′ les centres des deux cercles; D, D′ les points auxquels ils touchent la droite donnée; G le point d'intersection de la droite des centres et de la tangente commune donnée DD′; GH la seconde tangente commune; AO, AM les perpendiculaires abaissées du point donné A sur les deux tangentes GH, GD; O′, M′ les points symétriques de A, par rapport à ces deux droites, et enfin 2α l'angle donné CAC′.

Les distances GC, GC′ étant proportionnelles aux rayons AC, AC′, la droite GA est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle CAC′; il en résulte que l'angle GAC est le complément de α.

Les triangles GAC, GDC donnent

$$AC = CG\,\frac{\sin AGC}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad CD = CG\sin CGD,$$

donc

$$(1) \qquad \cos\alpha = \frac{\sin AGC}{\sin CGD};$$

(*) M. Maurice Cabart, garde général des forêts, a aussi trouvé l'équation d'un limaçon de Pascal, au moyen de plusieurs transformations successives de coordonnées.

mais, la ligne GC étant bissectrice de l'angle OGM des tangentes, on a

$$\mathrm{AGC} = \pm \tfrac{1}{2}(\mathrm{AGM} - \mathrm{AGO}) = \pm \tfrac{1}{2}(\mathrm{AOM} - \mathrm{AMO})$$

et

$$\mathrm{CGM} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AGM} + \mathrm{AGO}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AOM} + \mathrm{AMO});$$

il s'ensuit

$$\cos\alpha = \pm \frac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{AOM} - \mathrm{AMO})}{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{AOM} + \mathrm{AMO})}$$

$$= \pm \frac{\sin \mathrm{AOM} - \sin \mathrm{AMO}}{\sin \mathrm{OAM}} = \pm \frac{\mathrm{AM} - \mathrm{AO}}{\mathrm{MO}},$$

d'où

(1) $$\mathrm{AM} \pm \mathrm{MO}\cos\alpha = \mathrm{AO},$$

et, par conséquent,

(2) $$\mathrm{AM}' \pm \mathrm{M'O'}\cos\alpha = \mathrm{AO}'.$$

Cette dernière égalité montre que le lieu du point O′ est un limaçon de Pascal, dont les points A et M′ sont les foyers.

Remarque. — L'équation (2) représente, en coordonnées bipolaires, le lieu du point O′. Il est facile d'en déduire l'équation de ce lieu en prenant pour coordonnées le rayon vecteur $\mathrm{M'O'} = \rho$, et l'angle $\mathrm{O'M'A} = \omega$ que ce rayon vecteur forme avec l'axe polaire M′A; car, dans le triangle AM′O′, on a, en designant par $2d$ le côté AM′,

$$\overline{\mathrm{AO}'}^2 = 4d^2 + \rho^2 - 4d\rho\cos\omega.$$

D'autre part, l'équation (2) donne

$$\mathrm{AO}'^2 = 4d^2 + \rho^2\cos^2\alpha \pm 4d\rho\cos\alpha;$$

donc

$$\rho^2 - 4d\rho\cos\omega = \rho^2\cos^2\alpha \pm 4d\rho\cos\alpha,$$

ou

$$\rho = \frac{4d\cos\omega}{\sin^2\alpha} \pm \frac{4d\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

(G.).