G. BELLAVITIS

Exposition de la méthode des équipollences

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 138-152

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__138_1>

EXPOSITION DE LA METHODE DES EQUIPOLLENCES

(suite voir même tome p 98),

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M LAISANT, capitaine du Genie)

Tangente — La direction de la tangente en M est fournie par

$$dx\,OA + dy\,OB,$$

dx et dy etant lies par la relation, derivee de (2),

$$x\,dx - y\,dy = 0$$

Cela donne

$$MT \triangleq y\,OA + x\,OB, \tag{3}$$

relation qu'on aurait aussi en derivant par rapport a t l'equipollence

$$OM \triangleq \mathrm{ch}\,t . OA + \mathrm{sh}\,t\ OB$$

Cette tangente rencontre OA en un point S que l'on determine, en faisant que $OS \triangleq OM + k\,MT$ ne renferme pas de terme en OB Cela donne

$$k = -\frac{y}{x},$$

et

$$OS \triangleq \frac{1}{x}\,OA \tag{4}$$

Si P est le pied de l'ordonnee MP, on a donc

$$OP\ OS \triangleq (OA)^2$$

Proprietes de la droite MN *formant avec* MT *un angle egal a* AOB — La droite $MN \triangleq MT\ OB\ OA \triangleq y\,OB + x\,(OB)^2\ OA$ forme avec la tangente l'angle constant AOB Soit $N'M \triangleq MN$ Il viendra

$$OM - N'M \triangleq ON' \triangleq x\,OA - x\,(OB)^2\ OA \triangleq x\,OA - x\,OE \triangleq x\,EA, \tag{5}$$

si l'on forme le triangle BOE directement semblable a AOB

On a aussi

$$PN' \triangleq ON' - OP \triangleq x\, EO,$$

et les deux triangles OPN′, AOE sont homothétiques.

Si OA, OB sont les axes, NMM′ est la normale; elle coupe dans un rapport constant l'abscisse OP.

Diamètres conjugués, théorèmes d'Apollonius. — Si l'on a

$$c^2 - d^2 = 1,$$

et

(6) $$OC \triangleq c\,OA + d\,OB, \quad OD \triangleq d\,OA + c\,OB,$$

ces droites OC, OD, sont deux demi-diamètres conjugués.

Les relations (6) donnent en effet

$$OA \triangleq c\,OC - d\,OD, \quad OB \triangleq -d\,OC + c\,OD,$$

et, substituant dans (1),

$$OM \triangleq (cy - dy)\,OC + (cy - dx)\,OD,$$

équipollence de la même forme que (1), car

$$(cx - dy)^2 - (cy - dx)^2 = 1.$$

La règle XII montre que les aires des triangles OCD, OAB sont égales.

On vérifie que la relation suivante existe entre OC et OD :

$$(OC)^2 - (OD)^2 \triangleq (OA)^2 - (OB)^2.$$

Si donc on pose

(7) $$(OA)^2 - (OB)^2 \triangleq (OF)^2,$$

on obtiendra deux points remarquables F, F_1 (foyers) indépendants du choix des diamètres.

La relation (7) donne

$$(OB)^2 \triangleq (OA - OF)(OA + OF),$$

et, remarquant que $OF_1 \triangleq -\,OF$,

$$(OB)^2 \triangleq AF.AF_1.$$

Donc : *en un point quelconque de l'hyperbole, la tangente est bissectrice de l'angle des deux rayons vecteurs, et le produit de ceux-ci est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente.*

Trouver les foyers, connaissant deux diamètres conjugués. — Ce problème est résolu par l'équipollence (7), qu'on peut écrire

$$(OF)^2 \triangleq OA\,[OA - (OB)^2 : OA] \triangleq OA\,(OA - OE) \triangleq OA.EA,$$

c'est-à-dire que l'excentricité est moyenne proportionnelle entre AO, AE, et parallèle à la bissectrice de l'angle OAE.

Autrement

$$(OF)^2 \mathrel{\underline{\triangle}} (OA + OB)(OA - OB) \mathrel{\underline{\triangle}} OK.OK_1,$$

si l'on fait $AK \mathrel{\underline{\triangle}} - AK_1 \mathrel{\underline{\triangle}} OB$.

L'excentricite est donc aussi moyenne proportionnelle entre OK, OK_1, et bissectrice de l'angle de ces deux droites, dans lesquelles on reconnaît aisement les asymptotes.

Propriétés diverses. — Soient (*)

$$OL \mathrel{\underline{\triangle}} y\,OK, \quad OL_1 \mathrel{\underline{\triangle}} y\,OK_1, \quad OL' \mathrel{\underline{\triangle}} x\,OK, \quad OL'_1 \mathrel{\underline{\triangle}} x\,OK_1.$$

Si l'on se rappelle que

$$OK \mathrel{\underline{\triangle}} OA - OB, \quad OK_1 \mathrel{\underline{\triangle}} OA - OB,$$

on trouvera facilement les relations suivantes :

$$LM \mathrel{\underline{\triangle}} (x-y)\,OA, \quad L'M \mathrel{\underline{\triangle}} -(x-y)\,OB,$$

$$OM + OL_1 \mathrel{\underline{\triangle}} 2OQ \mathrel{\underline{\triangle}} (x+y)\,OA, \quad L'_1M \mathrel{\underline{\triangle}} (x+y)\,OB.$$

On peut deduire de la plusieurs equipollences, parmi lesquelles nous ferons remarquer les suivantes :

$$2OQ\,LM \mathrel{\underline{\triangle}} (OA)^2, \quad ML'.ML'_1 \mathrel{\underline{\triangle}} -(OB)^2, \quad 2OQ.ML' \mathrel{\underline{\triangle}} ML.ML'_1 \mathrel{\underline{\triangle}} OA.OB,$$

$$LM : ML' \mathrel{\underline{\triangle}} OA : OB, \quad 2OQ : L'_1M \mathrel{\underline{\triangle}} OA : OB.$$

Il est très-facile de les interpréter géométriquement, en remarquant que ML est une parallele à un diamètre transverse, limitee à une asymptote, LL_1 et $L'ML'_1$ des parallèles au diamètre conjugue, limitees aux deux asymptotes, et Q le point milieu de ML_1.

Interprétations mécaniques. — Dans le mouvement exprime par

$$OM \mathrel{\underline{\triangle}} \operatorname{ch} t.OA + \operatorname{sh} t\ OB,$$

la vitesse est

$$\operatorname{sh} t.OA + \operatorname{ch} t.OB,$$

et l'accéleration

$$\operatorname{ch} t.OA + \operatorname{sh} t.OB \mathrel{\underline{\triangle}} OM.$$

Ce mouvement est donc celui d'un point *repoussé* par un centre fixe en raison de la distance.

En se reportant aux formules

$$\operatorname{ch} t = \tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad \operatorname{sh} t = \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t}),$$

on voit que l'équipollence de l'hyperbole peut se mettre sous la forme

$$OM \mathrel{\underline{\triangle}} \tfrac{1}{2}OK\,e^t + \tfrac{1}{2}OK_1\,e^{-t}.$$

Cette courbe s'obtient donc par la composition des deux mouvements rectilignes representés par $\frac{1}{2}OK\,e^t$, $\frac{1}{2}OK_1\,e^{-t}$, s'effectuant suivant les asymptotes OK, OK_1.

Le produit de ces deux termes étant constant, on a la propriéte connue : *le produit des deux coordonnées d'un point est constant, les asymptotes étant prises pour axes coordonnés.*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Cycloïde.

153. Si un mouvement rectiligne uniforme est composé avec un mouvement circulaire de vitesse égale à celle du premier, on aura, en prenant les constantes de la manière que nous reconnaîtrons dans la suite être la plus convenable,

$$(1) \qquad OM \stackrel{\wedge}{=} t - \sqrt{}\varepsilon^t.$$

La courbe M peut être considérée comme engendrée par un point d'une circonférence de rayon égal à 1, qui se meut sur cette circonférence, tandis que le centre parcourt une droite d'inclinaison nulle. Comme la rotation entière du point mobile est achevée lorsque $t = 2\pi$, il est aisé de voir par là que la courbe est la cycloïde ordinaire.

154. Pour déterminer la tangente à la cycloïde, il est nécessaire de connaître la dérivée, par rapport à t, de $\varepsilon^t \stackrel{\wedge}{=} e^{t\sqrt{}}$. L'Algèbre des imaginaires nous enseigne que cette dérivée est

$$\sqrt{}\,.\,e^{t\sqrt{}} \stackrel{\wedge}{=} \sqrt{}\,\varepsilon^t.$$

Si l'on désirait une démonstration géométrique, on supposerait que, dans le cercle exprimé par

$$CM \stackrel{\wedge}{=} \varepsilon^t,$$

t reçoive l'accroissement ω. La corde correspondante MM_1, divisée par ω, c'est-à-dire par la longueur de l'arc correspondant du cercle de rayon 1, donne $MM_1 : \omega$, dont la limite, pour ω infiniment petit, sera une droite égale à 1, et perpendiculaire au rayon CM. Donc la dérivée de $CM \stackrel{\wedge}{=} \varepsilon^t$ est cette expression même ε^t multipliée par le rayon.

155. La tangente à la cycloïde est donnée en direction par la dérivée de l'équipollence (1), c'est-à-dire par

(2) $$\mathrm{MT} \triangleq 1 + \varepsilon',$$

et la normale a pour direction

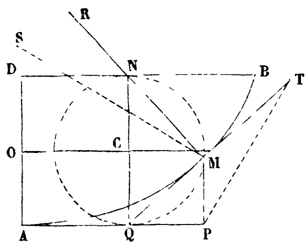
$$\mathrm{MN} \triangleq \surd + \surd\varepsilon'.$$

Il en résulte

$$\mathrm{ON} \triangleq t + \surd,$$

et, comme $\mathrm{OC} \triangleq t$ (*fig* 33) détermine la position variable du centre C du cercle générateur, il s'ensuit que la normale passe par l'extrémité du rayon $\mathrm{CN} \triangleq \surd$, perpendiculaire sur la base DB. On voit qu'on trouve ici cette propriété de la cycloïde d'une manière tout à fait

Fig. 33.



spontanée; le calcul sera un peu moins facile, si nous cherchons où la tangente MT rencontre la droite NCQ. Nous poserons, pour cela,

$$\mathrm{OQ} \triangleq t - q\surd \triangleq \mathrm{OM} + p\mathrm{MT} \triangleq t + p + (p - \surd)\varepsilon',$$

q, p étant deux quantités réelles qu'il reste à déterminer au moyen des deux équations en lesquelles se décompose cette équipollence, si l'on sépare les parties réelle et imaginaire

$$t = t + p + p\cos t + \sin t,$$

$$-q = p\sin t - \cos t.$$

Ces équations donnent $q = 1$, et par suite la tangente MT coupe le cercle générateur au point Q, diamétralement opposé à N (chose évidente, du reste).

156. La dérivée de la vitesse MT est

$$\sqrt{}\,\varepsilon^t \triangleq \mathrm{MC}\,; \tag{3}$$

c'est l'*accélération* du mouvement exprimé par l'équipollence (1) ; en d'autres termes, le point M, qui se meut sur la cycloïde selon cette loi, peut être considéré comme attiré par une force constante vers le centre mobile C du cercle générateur.

157. Si, comme au n° **143**, nous cherchons le point R de la normale MN, où celle-ci rencontre la normale infiniment voisine, nous devrons égaler à zéro la dérivée de

$$\mathrm{OR} \triangleq t - \sqrt{}\,\varepsilon^t + p\sqrt{}\,(1+\varepsilon^t),$$

c'est-à-dire que

$$(1+\varepsilon^t - p\varepsilon^t)\,dt + \sqrt{}\,(1+\varepsilon^t)\,dp \triangleq 0.$$

En considérant $\frac{dt}{dp}$ comme un rapport tout à fait arbitraire, on voit (*) que le produit

$$(1+\varepsilon^t - p\varepsilon^t)\,\mathrm{cj}\,(\sqrt{} + \sqrt{}\,\varepsilon^t) \triangleq -\sqrt{} - \sqrt{}\,\varepsilon^t + p\sqrt{}\,\varepsilon^t - \sqrt{}\,\varepsilon^{-t} - \sqrt{} + p\sqrt{}$$

doit être identique à son propre conjugué ; par suite, $p = 2$.

(*) En général, si $\mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy \triangleq 0$, on a en même temps

$$\mathrm{cj.A}\,dx + \mathrm{cj.B}\,dy \triangleq 0.$$

Multipliant la première équipollence par cj. B, la seconde par B et retranchant, on obtient

$$\mathrm{A\,cj.B} \triangleq \mathrm{cj.AB}.$$

(*Note du Traducteur.*)

Donc le rayon de courbure MR est double de la normale MN. Le lieu de tous les centres R, c'est-à-dire la développée, est donné par l'équipollence

$$(4) \qquad \mathrm{OR} \bumpeq 2\sqrt{\ } + t + \sqrt{\ }\varepsilon^t,$$

c'est par conséquent une cycloïde égale à la première

$$\mathrm{OM} \bumpeq t - \sqrt{\ }\varepsilon^t.$$

Les rayons des cercles générateurs en M et en R sont $-\sqrt{\ }\varepsilon^t$, $\sqrt{\ }\varepsilon^t$, c'est-à-dire parallèles, mais de directions opposées.

158. Soit que, par chaque point M de la cycloïde, on mène la droite MS, qui forme un angle donné α avec le rayon de courbure MR, et présente avec ce dernier un rapport donné a, de sorte que

$$\mathrm{MS} \bumpeq a\,\varepsilon^\alpha \mathrm{MR},$$

et que l'on cherche le lieu de tous les points S.

On a aisément

$$(5) \qquad \begin{aligned} \mathrm{OS} &\bumpeq t - \sqrt{\ }\varepsilon^t + 2a\sqrt{\ }\varepsilon^\alpha(1 + \varepsilon^t) \\ &\bumpeq 2a\sqrt{\ }\varepsilon^\alpha + t + (2a\varepsilon^\alpha - 1)\sqrt{\ }\varepsilon^t, \end{aligned}$$

ce qui montre que la courbe S est engendrée, elle aussi, par la composition d'un mouvement continu en ligne droite, exprimé par le terme t, avec un mouvement de rotation dont le rayon constant est $2a\varepsilon^\alpha - 1$.

Par suite, la courbe S est une cycloïde, qui est ordinaire toutes les fois que l'on a

$$\mathrm{gr.}\,(2a\varepsilon^\alpha - 1) = 1,$$

c'est-à-dire (52)

$$(2a\varepsilon^\alpha - 1)(2a\varepsilon^{-\alpha} - 1) \bumpeq 1 \quad \text{ou (92)} \quad a = \cos\alpha,$$

auquel cas la courbe S est développée imparfaite de la courbe M.

159. Comme nouvelle application de notre méthode et de la manière très-simple d'exprimer une cycloïde, recherchons la trajectoire orthogonale de toutes les positions que prend la cycloïde, en se mouvant parallèlement à sa base. Ces cycloïdes, en nombre infini, sont exprimées par

$$\text{(6)}\qquad \mathrm{OM} \simeq \tau + t - \sqrt{}\,\varepsilon^t,$$

τ étant le paramètre de position qui distingue l'une de l'autre les cycloïdes égales.

L'équipollence (6) exprimera aussi la trajectoire cherchée, si t est une telle fonction de τ, qu'elle indique sur chaque cycloïde le point où celle-ci est rencontrée par la trajectoire. La tangente à la trajectoire sera par suite exprimée par la dérivée de (6), prise par rapport à t, dérivée que nous désignerons par la caractéristique $\mathfrak{D}$. La tangente $\mathfrak{D}\tau + 1 + \varepsilon^t$ devra en outre (pour que l'on ait une trajectoire orthogonale) être perpendiculaire à la tangente $1 + \varepsilon^t$ (155) de chaque cycloïde. Donc $\mathfrak{D}\tau + 1 + \varepsilon^t$ doit être parallèle à $\sqrt{} + \sqrt{}\,\varepsilon^t$, c'est-à-dire que l'expression

$$(\mathfrak{D}\tau + 1 + \varepsilon^t)(-\sqrt{} - \sqrt{}\,\varepsilon^{-t}) \simeq -(1 + \varepsilon^{-t})\sqrt{}\,\mathfrak{D}\tau - 2\sqrt{} - \sqrt{}\,(\varepsilon^t + \varepsilon^{-t})$$

doit être équipollente à sa conjuguée, ce qui donne

$$\mathfrak{D}\tau = -2,$$

d'où

$$\tau = c - 2t;$$

par conséquent, toutes les trajectoires orthogonales cherchées sont exprimées par

$$\mathrm{OM} \simeq c - t - \sqrt{}\,\varepsilon^t,$$

c'est-à-dire sont d'autres cycloïdes égales aux premières, et ayant leurs bases sur la droite AQP.

160. On définit géométriquement la longueur d'un arc curviligne AM par la limite de la somme des cordes infiniment petites (c'est-à-dire diminuant au-dessous de toute quantité) inscrites dans cet arc ; par suite, la dérivée de cette longueur sera la limite du rapport de la corde MM_1 à l'accroissement correspondant de t, c'est-à-dire sera précisément la longueur de la droite MT, donnée par l'équipollence (2) du n° 155. Donc la dérivée de l'arc de cycloïde est (52),

$$\mathcal{D}s = \text{gr.}\,\text{MT} = \sqrt{(1+\varepsilon^t)(1+\varepsilon^{-t})} = \varepsilon^{\frac{t}{2}} + \varepsilon^{-\frac{t}{2}} = 2\cos\frac{t}{2},$$

et, comptant l'arc à partir du point A, correspondant à $t = 0$, on a

$$s = \text{AM} = 4\sin\frac{t}{2} \quad \text{et} \quad \text{AMB} = 4.$$

161. On trouve (*) que l'aire σ du triangle mixtiligne APM, limité par l'arc AM et l'ordonnée PM, a pour dé-

---

(*) Soit en effet, en général,

$$\text{OM} \triangleq x + y\sqrt{},$$

d'où

$$\text{MT} \triangleq \frac{dx}{dt} + \sqrt{}\,\frac{dy}{dt}.$$

La différentielle de l'aire mixtiligne est

$$\text{MP}\,dx = d\sigma\,;$$

mais le triangle MPT a pour aire

$$\sigma_1 = \tfrac{1}{2}\,\text{MP}\,\frac{dx}{dt}\,;$$

donc

$$d\sigma = 2\sigma_1\,dt, \quad \frac{d\sigma}{dt} = 2\sigma_1.$$

(*Note du Traducteur.*)

rivée le double du triangle MPT, c'est-à-dire, d'après la règle XII, que l'on a

$$\mathcal{D}\sigma = \frac{\sqrt{}}{2}(\mathrm{MP\,cj.MT} - \mathrm{cj.MP.MT}).$$

Dans le cas que nous considérons, la distance du point M à la droite OC est

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{OM} - \mathrm{cj.OM}) \bumpeq \frac{\sqrt{}}{2}(\varepsilon^{t} + \varepsilon^{-t});$$

par suite

$$\mathrm{MP} \bumpeq -\sqrt{} + \frac{\sqrt{}}{2}(\varepsilon^{t} + \varepsilon^{-t}).$$

De là

$$\mathcal{D}\sigma = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}(\varepsilon^{2t} + \varepsilon^{-2t}) = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2t),$$

et, en remontant aux fonctions primitives,

$$\sigma = \mathrm{APM} = \frac{t}{2} - \tfrac{1}{4}\sin 2t.$$

Problèmes généraux.

162. Par ces quelques exemples, j'espère avoir montré comment la méthode des équipollences s'applique à l'étude des courbes, et comment celles-ci peuvent être exprimées par des équipollences de formes différentes des deux suivantes :

$$\mathrm{OM} \bumpeq x + y\sqrt{},$$
$$\mathrm{OM} \bumpeq z\varepsilon^{u},$$

qui correspondent aux deux systèmes de coordonnées habituellement employés en Géométrie analytique. Ainsi l'équipollence de la cycloïde (153) est certainement plus simple que toute autre expression qu'on en puisse donner, et conduit par suite plus rapidement à la résolution des problèmes.

Nous allons maintenant résoudre les principaux problèmes relatifs aux courbes, en conservant à l'équipollence $\mathrm{OM} \bumpeq \Phi(t)$ (133) toute sa généralité.

163. Problème. — *Trouver la développée d'une courbe* M. — En prenant les dérivées par rapport à la variable réelle t, dont OM est supposée fonction, la tangente à la courbe au point M sera

$$(1) \qquad \mathrm{MT} \bumpeq \mathcal{D}\mathrm{OM}.$$

Pour plus de rapidité, nous omettrons, dans les dérivées, le point fixe O, et nous écrirons $\mathcal{D}\mathrm{M}$ au lieu de $\mathcal{D}\mathrm{OM}$. Un point quelconque de la normale est conséquemment donné par

$$(2) \qquad \mathrm{MR} \bumpeq \frac{\surd}{\lambda}\mathcal{D}\mathrm{M},$$

λ étant un coefficient réel arbitraire.

La développée, étant l'enveloppe de toutes les normales, sera donnée par

$$\mathrm{OR} \bumpeq \mathrm{OM} + \frac{1}{\lambda}\surd\mathcal{D}\mathrm{M},$$

pourvu que λ soit une telle fonction de t, que MR soit tangente à la développée au point R; par suite, la droite

$$\mathcal{D}\mathrm{R} \bumpeq \mathcal{D}\mathrm{M} + \frac{1}{\lambda}\surd\,\mathcal{D}^2\mathrm{M} - \frac{\mathcal{D}\lambda}{\lambda^2}\surd\mathcal{D}\mathrm{M}$$

doit être parallèle à $\surd\mathcal{D}\mathrm{M}$.

Multipliant par $\mathrm{cj}.\mathcal{D}\mathrm{M}$, on voit que

$$\mathcal{D}\mathrm{M}\,\mathrm{cj}.\mathcal{D}\mathrm{M} + \frac{1}{\lambda}\surd\,\mathrm{cj}.\mathcal{D}\mathrm{M}\,\mathcal{D}^2\mathrm{M}$$

doit être parallèle à $\surd$.

De là, en ajoutant l'expression conjuguée, on aura

$$2\mathfrak{D}M\,\mathrm{cj}.\mathfrak{D}M + \frac{1}{\lambda}\sqrt{}\,(\mathrm{cj}.\mathfrak{D}M\,\mathfrak{D}^2M - \mathfrak{D}M\,\mathrm{cj}.\mathfrak{D}^2M) \bumpeq 0.$$

Substituant dans l'équipollence (2), on a, pour expression du rayon de courbure,

$$(3)\qquad MR \bumpeq \frac{2(\mathfrak{D}M)^2\,\mathrm{cj}.\mathfrak{D}M}{\mathfrak{D}M\,\mathrm{cj}.\mathfrak{D}^2M - \mathrm{cj}.\mathfrak{D}M\,\mathfrak{D}^2M}.$$

164. Au lieu d'employer cette relation (3), il pourra être commode de décomposer $\mathfrak{D}^2M : \mathfrak{D}M$ en ses parties réelle et imaginaire, c'est-à-dire de poser

$$(4)\qquad \frac{\mathfrak{D}^2M}{\mathfrak{D}M} \bumpeq l + \lambda\sqrt{},$$

et comme cette supposition rend identique l'équipollence précédente

$$2 + \frac{\sqrt{}}{\lambda}\left(\frac{\mathfrak{D}^2M}{\mathfrak{D}M} - \frac{\mathrm{cj}.\mathfrak{D}^2M}{\mathrm{cj}.\mathfrak{D}M}\right) \bumpeq 0,$$

on voit que la valeur de λ, qu'il faut substituer dans (2), est précisément celle donnée par (4).

165. Appliquons la relation (3) au cas où la courbe M est rapportée aux coordonnées orthogonales habituelles, c'est-à-dire où l'on a

$$OM \bumpeq x + y\sqrt{},$$

x et y étant des fonctions de la variable t, par rapport à laquelle on prend les dérivées désignées par la caracté ristique $\mathfrak{D}$.

Les valeurs de

$$\mathfrak{D}M \bumpeq \mathfrak{D}x + \mathfrak{D}y\sqrt{},$$
$$\mathrm{cj}.\mathfrak{D}M \bumpeq \mathfrak{D}x - \mathfrak{D}y\sqrt{},\ldots,$$

substituées dans (3), donnent aisément

$$(5)\qquad \mathrm{MR} \bumpeq \frac{2(\mathcal{D}x^2+\mathcal{D}y^2)(\mathcal{D}x+\sqrt{}\,\mathcal{D}y)}{2(\mathcal{D}y\,\mathcal{D}^2x-\mathcal{D}x\,\mathcal{D}^2y)\sqrt{}}$$

$$\bumpeq \frac{(\mathcal{D}x^2+\mathcal{D}y^2)(\mathcal{D}y-\sqrt{}\,\mathcal{D}x)}{\mathcal{D}y\,\mathcal{D}^2x-\mathcal{D}x\,\mathcal{D}^2y}.$$

Ainsi se trouve complétement déterminée la position du centre de courbure R. Pour la grandeur du rayon MR, on a

$$\pm(\mathcal{D}x^2+\mathcal{D}y^2)^{\frac{3}{2}} : (\mathcal{D}y\,\mathcal{D}^2x-\mathcal{D}x\,\mathcal{D}^2y).$$

166. Un nouvel exemple relatif à cette théorie va nous être fourni par la courbe qu'exprime l'équipollence

$$\mathrm{OM} \bumpeq e^{at}\varepsilon^t.$$

Cette courbe est une spirale logarithmique, parce que le logarithme du rayon vecteur gr. $\mathrm{OM} = e^{at}$ est proportionnel à l'azimut inc. $\mathrm{OM} = t$.

Prenant les dérivées par rapport à t, on aura

$$\mathcal{D}\,\mathrm{M} \bumpeq (a+\sqrt{})\,e^{at}\varepsilon^t,$$
$$\mathcal{D}^2\mathrm{M} \bumpeq (a+\sqrt{})^2 e^{at}\varepsilon^t.$$

Donc l'équipollence (4) donne

$$l+\lambda\sqrt{} \bumpeq a+\sqrt{},$$

c'est-à-dire $\lambda = 1$; et (2) devient

$$\mathrm{MR} \bumpeq (a\sqrt{}-1)e^{at}\varepsilon^t.$$

La développée, donnée par

$$\mathrm{OR} \bumpeq \mathrm{OM}+\mathrm{MR} \bumpeq a\sqrt{}\,e^{at}\varepsilon^t,$$

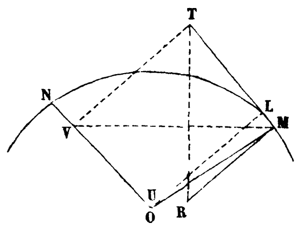
est une spirale logarithmique égale à M.

167. La décomposition effectuée au n° 164 peut se

construire géométriquement. Outre $MT \bumpeq \textcircled{d}M$, on construit (*fig.* 34)

$$MU \bumpeq \textcircled{d}^2 M,$$

Fig. 34.



et l'on mène UL perpendiculaire sur MT. On aura

$$LU \bumpeq \lambda\sqrt{MT},$$

et, par suite, la relation (2) nous donnera

$$(6) \qquad MR \bumpeq (MT)^2 : UL.$$

Ainsi par exemple, dans l'ellipse exprimée par

$$OM \bumpeq \cos t.\, OA + \sin t.\, OB,$$

la droite

$$MT \bumpeq - \sin t.\, OA + \cos t.\, OB$$

est équipollente au demi-diamètre ON conjugué de OM, et la relation

$$MU \bumpeq - OM$$

nous montre que U tombe au centre O de l'ellipse.

Par suite, le centre de courbure R pourra se déterminer en élevant les perpendiculaires MR, TV, et en menant TR perpendiculaire à MV (*).

(*) Car la similitude des deux triangles RMT, MTV donne

$$\frac{MR}{MT} \bumpeq \frac{TM}{TV} \bumpeq \frac{MT}{VT} \bumpeq \frac{MT}{UL}, \quad \text{d'où} \quad MR \bumpeq (MT)^2 : UL.$$

(*Note du Traducteur.*)

Dans l'hypothèse où la courbe est engendrée par le mouvement d'un point M, t étant le temps, MT est la vitesse et MU (151) l'*accélération* du mouvement; par suite, le rayon de courbure est égal au carré de la vitesse, divisé par la composante normale de l'accélération.

168. Outre les expressions

$$OM \bumpeq x + y\surd, \quad OM \bumpeq z\varepsilon^{u},$$

il est bon de remarquer spécialement la suivante :

$$(7) \qquad OM \bumpeq \int \varepsilon^{\varphi}.ds \quad (*),$$

où φ (inclinaison de la tangente) est fonction de s, ou bien, ce qui revient au même, où ces deux variables sont fonctions de la variable indépendante t.

L'expression précédente donne

$$\mathfrak{D}^2 M \bumpeq (\mathfrak{D}^2 s + \surd \mathfrak{D}\varphi \mathfrak{D}s)\varepsilon^{\varphi};$$

en vertu de (4), on a

$$l + \lambda\surd \bumpeq \frac{\mathfrak{D}^2 s}{\mathfrak{D}s} + \surd\mathfrak{D}\varphi,$$

et le rayon de courbure est exprimé par

$$(8) \qquad MR \bumpeq \surd \frac{\mathfrak{D}s}{\mathfrak{D}\varphi}\varepsilon^{\varphi}.$$

(*A suivre.*)

(*) On arrive évidemment à cette expression en considérant une corde finie de la courbe comme la *somme géométrique* de tous les éléments infiniment petits de l'arc partant d'une extrémité de cette corde pour aboutir à l'autre. (*Note du Traducteur.*)