NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CROSNIER

Sections circulaires des surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 12-15

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__12_1>

SECTIONS CIRCULAIRES DES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. CROSNIER,

Agrégé de l'Université, professeur au lycée d'Auch.

Si une surface du second ordre peut être coupée suivant un cercle, on pourra faire passer par cette courbe une sphère qui coupera, comme on sait, la surface suivant un second cercle; et, par suite, par l'intersection des deux surfaces, on pourra faire passer un système de deux plans.

Soit

$$f(x, y, z) = Ax^2 + \ldots = 0$$

l'équation de la surface donnée qui est rapportée à des axes rectangulaires quelconques.

Soit

$$S = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 - r^2 = 0$$

l'équation d'une sphère quelconque.

L'équation des surfaces du second ordre, qui passent par l'intersection de la surface proposée et de la sphère, étant

$$f - kS = 0, \tag{1}$$

on peut déterminer k, α, β, γ, r de manière que cette équation représente un système de deux plans qui passent par un point donné arbitraire.

En effet, pour que l'équation (1) représente un système de deux plans, il faut que :

1° Le déterminant des équations du centre soit nul;

2° Les plans du centre passent par un même point;

3° La surface elle-même passe par ce point.

Les équations du centre sont

$$\begin{aligned}
Ax + B''y + B'z + C - k(x-\alpha) &= 0,\\
B''x + A'y + Bz + C' - k(y-\beta) &= 0,\\
B'x + By + A''z + C'' - k(z-\gamma) &= 0.
\end{aligned}$$

Le déterminant de ces équations annulé nous donne l'équation

$$\begin{vmatrix} A-k & B'' & B' \\ B'' & A'-k & B \\ B' & B & A''-k \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

et, par suite, k est l'une des racines de l'équation en S. Prenons l'une de ces valeurs.

Nous pouvons déterminer α, β, γ par la condition que les plans du centre passent par un même point x', y', z' quelconque, pourvu que la valeur de k, que nous avons choisie, ne soit pas nulle.

Enfin nous pouvons déterminer le rayon de la sphère, qui reste encore arbitraire, de manière que la surface (1) passe par le point x', y', z'.

Comme cela résulte évidemment de ce qui précède, à chaque valeur de k correspond un seul système de valeurs de α, β, γ, r^2; d'où il suit que par chaque point de l'espace passent trois systèmes de deux plans, qui coupent la surface proposée suivant des cercles; mais ces trois systèmes de plans ne sont pas tous réels.

Pour que l'équation (1), dans laquelle α, β, γ, r^2 et k ont les valeurs que je viens de déterminer, représente un système de plans réels, il faut et il suffit que sa trace sur l'un des plans coordonnés soit du genre hyperbole, ou que $(A'-k)(A''-k)-B^2<0$. Mais il résulte de la discussion de l'équation en S, par la méthode de Cauchy, que la racine moyenne satisfait seule à cette condition; donc il n'y a qu'un seul système de plans qui soient réels et qui coupent la surface suivant des cercles.

L'équation (1) du système des deux plans a ses termes du second degré indépendants de α, β, γ et r^2; par conséquent, les plans qu'elle représente ont une direction déterminée qui ne dépend que de la valeur de k.

Ces deux plans ne sont du reste pas parallèles; car l'ensemble des termes du second degré de l'équation (1) ne forme pas un carré parfait.

L'intersection de deux plans d'un système est donnée par l'intersection de deux plans du centre; or ces plans sont respectivement parallèles à ceux qui donnent la direction des cordes principales; donc les plans des sections circulaires sont respectivement parallèles aux axes de la surface. Les plans réels sont parallèles à l'axe moyen de la surface, car l'axe moyen correspond à la racine moyenne de l'équation en S.

L'application de ce qui précède aux surfaces dont on a l'équation réduite est trop facile pour qu'il soit nécessaire de la faire.

On pourrait supposer que les axes des coordonnées sont obliques, et la discussion ne serait pas plus difficile.

L'équation (1), pouvant s'écrire $S = \frac{f}{k}$, peut s'interpréter géométriquement sans aucune difficulté.

Enfin on peut facilement déduire de ce qui précède les conditions pour que la surface soit de révolution; il faut que l'équation (1) représente deux plans parallèles et, par suite, que les termes du second degré forment un carré parfait, ou que les plans du centre soient identiques dans la partie du premier degré, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{A - k}{B''} = \frac{B''}{A' - k} = \frac{B'}{B},$$

$$\frac{A - k}{B'} = \frac{B''}{B} = \frac{B'}{A'' - k};$$

d'où

$$A - k = \frac{B'B''}{B},$$

$$A' - k = \frac{BB''}{B'},$$

$$A'' - k = \frac{BB'}{B''},$$

d'où résultent les conditions ordinaires.